Autour de l'hyperbolicité en géométrie complexe

Erwan Rousseau

Université de Strasbourg

Strasbourg, 17 Novembre 2010.

Hyperbolicité

L'étude de l'hyperbolicité a déjà une longue histoire

Hyperbolicité

L'étude de l'hyperbolicité a déjà une longue histoire

- $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\} = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ n'a pas de courbes entières i.e. d'applications holomorphes non constantes $f : \mathbb{C} \to X$ (Petit théorème de Picard).

Hyperbolicité

L'étude de l'hyperbolicité a déjà une longue histoire

- $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\} = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ n'a pas de courbes entières i.e. d'applications holomorphes non constantes $f : \mathbb{C} \to X$ (Petit théorème de Picard).

Définition

Une variété complexe X est hyperbolique au sens de Brody s'il n'existe pas de courbes entières $f : \mathbb{C} \to X$.

Hyperbolicité

L'étude de l'hyperbolicité a déjà une longue histoire

- $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\} = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ n'a pas de courbes entières i.e. d'applications holomorphes non constantes $f : \mathbb{C} \to X$ (Petit théorème de Picard).

Définition

Une variété complexe X est hyperbolique au sens de Brody s'il n'existe pas de courbes entières $f : \mathbb{C} \to X$.

- Pour X une variété complexe lisse, $\xi \in T_{X,x}$ un vecteur tangent à X en x. On définit sa pseudo-norme de Kobayashi par

$$k(\xi) = \inf\{\lambda > 0; \exists f : \mathbb{D} \to X, f(0) = x, \lambda f'(0) = \xi\}.$$

Hyperbolicité

L'étude de l'hyperbolicité a déjà une longue histoire

- $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\} = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ n'a pas de courbes entières i.e. d'applications holomorphes non constantes $f : \mathbb{C} \to X$ (Petit théorème de Picard).

Définition

Une variété complexe X est hyperbolique au sens de Brody s'il n'existe pas de courbes entières $f : \mathbb{C} \to X$.

- Pour X une variété complexe lisse, $\xi \in T_{X,x}$ un vecteur tangent à X en x. On définit sa pseudo-norme de Kobayashi par

$$k(\xi) = \inf\{\lambda > 0; \exists f : \mathbb{D} \to X, f(0) = x, \lambda f'(0) = \xi\}.$$

- La pseudo-distance de Kobayashi d_X est la pseudo-distance géodésique obtenue en intégrant cette pseudo-norme.

Hyperbolicité

Définition

Une variété complexe X est hyperbolique (au sens de Kobayashi) si d_X est une distance.

Hyperbolicité

Définition

Une variété complexe X est hyperbolique (au sens de Kobayashi) si d_X est une distance.

Théorème (Brody)

Une variété complexe compacte X est hyperbolique si et seulement si elle est hyperbolique au sens de Brody.

Hyperbolicité

Définition

Une variété complexe X est hyperbolique (au sens de Kobayashi) si d_X est une distance.

Théorème (Brody)

Une variété complexe compacte X est hyperbolique si et seulement si elle est hyperbolique au sens de Brody.

- L'intérêt pour les variétés hyperboliques est notamment motivé par leurs propriétés diophantiennes conjecturales:

Conjecture (Lang)

Si une variété projective X définie sur $\mathbb{Q}$ est hyperbolique, alors $X(\mathbb{Q})$ est fini.

Hyperbolicité

- La philosophie est que la géométrie des courbes entières dans une variété algébrique est gouvernée par le fibré canonique $K_X := \det(T_X^*)$.

Hyperbolicité

- La philosophie est que la géométrie des courbes entières dans une variété algébrique est gouvernée par le fibré canonique $K_X := \det(T_X^*)$.

Conjecture (Green-Griffiths, Lang)

Soit X une variété projective de type général. Alors il existe une sous-variété $Y \subsetneqq X$ telle que toute courbe entière non-constante $f : \mathbb{C} \to X$ vérifie $f(\mathbb{C}) \subset Y$.

Hyperbolicité

- La philosophie est que la géométrie des courbes entières dans une variété algébrique est gouvernée par le fibré canonique $K_X := \det(T_X^*)$.

Conjecture (Green-Griffiths, Lang)

Soit X une variété projective de type général. Alors il existe une sous-variété $Y \subsetneq X$ telle que toute courbe entière non-constante $f : \mathbb{C} \to X$ vérifie $f(\mathbb{C}) \subset Y$.

Nous présentons différentes approches de l'hyperbolicité

Hyperbolicité

- La philosophie est que la géométrie des courbes entières dans une variété algébrique est gouvernée par le fibré canonique $K_X := \det(T_X^*)$.

Conjecture (Green-Griffiths, Lang)

Soit X une variété projective de type général. Alors il existe une sous-variété $Y \subsetneq X$ telle que toute courbe entière non-constante $f : \mathbb{C} \to X$ vérifie $f(\mathbb{C}) \subset Y$.

Nous présentons différentes approches de l'hyperbolicité

1. Hyperbolicité algébrique

Hyperbolicité

- La philosophie est que la géométrie des courbes entières dans une variété algébrique est gouvernée par le fibré canonique $K_X := \det(T_X^*)$.

Conjecture (Green-Griffiths, Lang)

Soit X une variété projective de type général. Alors il existe une sous-variété $Y \subsetneqq X$ telle que toute courbe entière non-constante $f : \mathbb{C} \to X$ vérifie $f(\mathbb{C}) \subset Y$.

Nous présentons différentes approches de l'hyperbolicité

1. Hyperbolicité algébrique
2. Equations différentielles algébriques

Hyperbolicité

- La philosophie est que la géométrie des courbes entières dans une variété algébrique est gouvernée par le fibré canonique $K_X := \det(T^*_X)$.

Conjecture (Green-Griffiths, Lang)

Soit X une variété projective de type général. Alors il existe une sous-variété $Y \subsetneqq X$ telle que toute courbe entière non-constante $f : \mathbb{C} \to X$ vérifie $f(\mathbb{C}) \subset Y$.

Nous présentons différentes approches de l'hyperbolicité

1. Hyperbolicité algébrique
2. Equations différentielles algébriques
3. Structures orbifoldes

Hyperbolicité

- La philosophie est que la géométrie des courbes entières dans une variété algébrique est gouvernée par le fibré canonique $K_X := \det(T_X^*)$.

Conjecture (Green-Griffiths, Lang)

Soit X une variété projective de type général. Alors il existe une sous-variété $Y \subsetneq X$ telle que toute courbe entière non-constante $f : \mathbb{C} \to X$ vérifie $f(\mathbb{C}) \subset Y$.

Nous présentons différentes approches de l'hyperbolicité

1. Hyperbolicité algébrique
2. Equations différentielles algébriques
3. Structures orbifoldes
4. Courants d'Ahlfors, feuilletages

Hyperbolicité algébrique

- L'hyperbolicité impose de fortes restrictions sur les sous-variétés.

Hyperbolicité algébrique

- L'hyperbolicité impose de fortes restrictions sur les sous-variétés.

Définition (Demailly)

Soit X une variété projective. On dit que X est algébriquement hyperbolique s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute courbe algébrique irréductible $C \subset X$ on ait

$$-\chi(\overline{C}) = 2g(\overline{C}) - 2 \geq \varepsilon \deg(C)$$

où $g(\overline{C})$ est le genre de la normalisation de C, $\chi(\overline{C})$ sa caractéristique d'Euler.

Hyperbolicité algébrique

- L'hyperbolicité impose de fortes restrictions sur les sous-variétés.

Définition (Demailly)

Soit X une variété projective. On dit que X est algébriquement hyperbolique s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute courbe algébrique irréductible $C \subset X$ on ait

$$-\chi(\overline{C}) = 2g(\overline{C}) - 2 \geq \varepsilon \deg(C)$$

où $g(\overline{C})$ est le genre de la normalisation de C, $\chi(\overline{C})$ sa caractéristique d'Euler.

- Si X est hyperbolique alors X est algébriquement hyperbolique.

Hyperbolicité algébrique

- L'hyperbolicité impose de fortes restrictions sur les sous-variétés.

Définition (Demailly)

Soit X une variété projective. On dit que X est algébriquement hyperbolique s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute courbe algébrique irréductible $C \subset X$ on ait

$$-\chi(\overline{C}) = 2g(\overline{C}) - 2 \geq \varepsilon \deg(C)$$

où $g(\overline{C})$ est le genre de la normalisation de C, $\chi(\overline{C})$ sa caractéristique d'Euler.

- Si X est hyperbolique alors X est algébriquement hyperbolique.
- Définition analogue dans le cas des paires logarithmiques (X, D) (Chen).

Hypersurfaces de l'espace projectif

Conjecture (Kobayashi)

- *Une hypersurface générique* $X_d \subset \mathbb{P}^n$ $(n \geq 3)$ *de degré* d *est hyperbolique pour* $d \geq 2n - 1$.
- $\mathbb{P}^n \backslash X_d$ *est hyperbolique pour* X_d *hypersurface générique de degré* $d \geq 2n + 1$.

Hypersurfaces de l'espace projectif

Conjecture (Kobayashi)

- *Une hypersurface générique* $X_d \subset \mathbb{P}^n$ $(n \geq 3)$ *de degré* d *est hyperbolique pour* $d \geq 2n-1$.
- $\mathbb{P}^n \backslash X_d$ *est hyperbolique pour* X_d *hypersurface générique de degré* $d \geq 2n+1$.

- Une hypersurface très générique de degré $d \geq 2n-1$ $(d \geq 2n-2, n \geq 6)$ dans $\mathbb{P}^n$ est algébriquement hyperbolique (Clemens, Voisin, Pacienza).

Hypersurfaces de l'espace projectif

Conjecture (Kobayashi)

- *Une hypersurface générique $X_d \subset \mathbb{P}^n$ $(n \geq 3)$ de degré d est hyperbolique pour $d \geq 2n - 1$.*
- *$\mathbb{P}^n \backslash X_d$ est hyperbolique pour X_d hypersurface générique de degré $d \geq 2n + 1$.*

- Une hypersurface très générique de degré $d \geq 2n - 1$ $(d \geq 2n - 2, n \geq 6)$ dans $\mathbb{P}^n$ est algébriquement hyperbolique (Clemens, Voisin, Pacienza).

Théorème (Pacienza, R.)

Soit X_d une hypersurface très générique de degré $d \geq 2n + 1$ dans $\mathbb{P}^n$. Alors $(\mathbb{P}^n, X_d)$ est algébriquement hyperbolique.

Hypersurfaces de l'espace projectif

- Les surfaces génériques $X^2 \subset \mathbb{P}^3$ de degré $\deg X^2 \geq 18$ sont hyperboliques. (McQuillan, Demailly-El Goul, Paun)

Hypersurfaces de l'espace projectif

- Les surfaces génériques $X^2 \subset \mathbb{P}^3$ de degré $\deg X^2 \geq 18$ sont hyperboliques. (McQuillan, Demailly-El Goul, Paun)

Théorème (R.)

Soit $X \subset \mathbb{P}^4$ une hypersurface générique de degré $d \geq 593$. Alors toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ est algébriquement dégénérée, i.e. il existe une sous-variété $Y \subsetneq X$ telle que $f(\mathbb{C}) \subset Y$.

Hypersurfaces de l'espace projectif

- Les surfaces génériques $X^2 \subset \mathbb{P}^3$ de degré $\deg X^2 \geq 18$ sont hyperboliques. (McQuillan, Demailly-El Goul, Paun)

Théorème (R.)

Soit $X \subset \mathbb{P}^4$ une hypersurface générique de degré $d \geq 593$. Alors toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ est algébriquement dégénérée, i.e. il existe une sous-variété $Y \subsetneq X$ telle que $f(\mathbb{C}) \subset Y$.

Théorème (Diverio, Merker, R.)

Soit $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ une hypersurface lisse générique de degré d. Si

$$d \geq 2^{n^5},$$

alors il existe une sous-variété propre $Y \subsetneq X$ telle que toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ vérifie $f(\mathbb{C}) \subset Y$.

Courbes entières et équations différentielles

- Soit $f : (\mathbb{C}, 0) \to (X, x)$ un germe de courbe holomorphe dans une variété complexe lisse X^n.

Courbes entières et équations différentielles

- Soit $f : (\mathbb{C}, 0) \to (X, x)$ un germe de courbe holomorphe dans une variété complexe lisse X^n.
- On considère les opérateurs différentiels algébriques d'ordre k

$$P(f', f'', \dots, f^{(k)}) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}(f)(f')^{\alpha_1}(f'')^{\alpha_2} \dots (f^{(k)})^{\alpha_k},$$

où les $a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}(z_1, \dots, z_n)$ sont holomorphes et $(f^{(i)})^{\alpha_i} = (f_1^{(i)})^{\alpha_{i,1}} \dots (f_n^{(i)})^{\alpha_{i,n}}, \alpha_i = (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n})$.

Courbes entières et équations différentielles

- Soit $f : (\mathbb{C}, 0) \to (X, x)$ un germe de courbe holomorphe dans une variété complexe lisse X^n.
- On considère les opérateurs différentiels algébriques d'ordre k

$$P(f', f'', \dots, f^{(k)}) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}(f)(f')^{\alpha_1}(f'')^{\alpha_2} \dots (f^{(k)})^{\alpha_k},$$

où les $a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}(z_1, \dots, z_n)$ sont holomorphes et $(f^{(i)})^{\alpha_i} = (f_1^{(i)})^{\alpha_{i,1}} \dots (f_n^{(i)})^{\alpha_{i,n}}, \alpha_i = (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n})$.

Définition

On note $E_{k,m}^{GG}$ le fibré vectoriel dont les sections sont les opérateurs différentiels algébriques d'ordre k et de degré $|\alpha_1| + 2|\alpha_2| + \dots + k|\alpha_k| = m$.

Courbes entières et équations différentielles

Théorème (Bloch, Green-Griffiths, Demailly, Siu)

Soit X une variété complexe projective lisse, A un fibré en droites ample sur X et $P \in H^0(X, E_{k,m}^{GG} \otimes A^{-1})$. Alors $P(f', \dots, f^{(k)}) \equiv 0$ pour toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$.

Courbes entières et équations différentielles

Théorème (Bloch, Green-Griffiths, Demailly, Siu)

Soit X une variété complexe projective lisse, A un fibré en droites ample sur X et $P \in H^0(X, E_{k,m}^{GG} \otimes A^{-1})$. Alors $P(f', \dots, f^{(k)}) \equiv 0$ pour toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$.

Théorème (Bogomolov, McQuillan)

Soit X une surface de type général telle que $c_1^2 - c_2 > 0$. Alors X n'a qu'un nombre fini de courbes rationnelles ou elliptiques et toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ y est contenue.

Courbes entières et équations différentielles

Théorème (Bloch, Green-Griffiths, Demailly, Siu)

Soit X une variété complexe projective lisse, A un fibré en droites ample sur X et $P \in H^0(X, E_{k,m}^{GG} \otimes A^{-1})$. Alors $P(f', \dots, f^{(k)}) \equiv 0$ pour toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$.

Théorème (Bogomolov, McQuillan)

Soit X une surface de type général telle que $c_1^2 - c_2 > 0$. Alors X n'a qu'un nombre fini de courbes rationnelles ou elliptiques et toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ y est contenue.

- On utilise le théorème d'annulation de Bogomolov: $H^2(X, S^m T_X^* \otimes A^{-1}) = 0$ pour $m \gg 1$.

Courbes entières et équations différentielles

Théorème (Bloch, Green-Griffiths, Demailly, Siu)

Soit X une variété complexe projective lisse, A un fibré en droites ample sur X et $P \in H^0(X, E_{k,m}^{GG} \otimes A^{-1})$. Alors $P(f', \ldots, f^{(k)}) \equiv 0$ pour toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$.

Théorème (Bogomolov, McQuillan)

Soit X une surface de type général telle que $c_1^2 - c_2 > 0$. Alors X n'a qu'un nombre fini de courbes rationnelles ou elliptiques et toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ y est contenue.

- On utilise le théorème d'annulation de Bogomolov: $H^2(X, S^m T_X^* \otimes A^{-1}) = 0$ pour $m \gg 1$.
- **Principal problème en dimension supérieure: contrôle de la cohomologie.**

Jets de Demailly-Semple

- Soit X une variété complexe lisse. On part d'une variété dirigée (X, V).

Jets de Demailly-Semple

- Soit X une variété complexe lisse. On part d'une variété dirigée (X, V).
- On définit $X_1 := \mathbb{P}(V)$, et $V_1 \subset T_{X_1}$:

$$V_{1,(x,[v])} := \{\xi \in T_{X_1,(x,[v])} \; ; \; \pi_* \xi \in \mathbb{C} v\}$$

où $\pi : X_1 \to X$ est la projection naturelle.

Jets de Demailly-Semple

- Soit X une variété complexe lisse. On part d'une variété dirigée (X, V).
- On définit $X_1 := \mathbb{P}(V)$, et $V_1 \subset T_{X_1}$:

$$V_{1,(x,[v])} := \{\xi \in T_{X_1,(x,[v])} \ ; \ \pi_* \xi \in \mathbb{C}v\}$$

  où $\pi : X_1 \to X$ est la projection naturelle.
- Si $f : (\mathbb{C}, 0) \to (X, x)$ est un germe de courbe holomorphe tangente à V alors on peut la relever à X_1 par $f_{[1]} = (f, [f'])$.

Jets de Demailly-Semple

- Soit X une variété complexe lisse. On part d'une variété dirigée (X, V).
- On définit $X_1 := \mathbb{P}(V)$, et $V_1 \subset T_{X_1}$:

$$V_{1,(x,[v])} := \{\xi \in T_{X_1,(x,[v])} \ ; \ \pi_*\xi \in \mathbb{C}v\}$$

  où $\pi : X_1 \to X$ est la projection naturelle.
- Si $f : (\mathbb{C}, 0) \to (X, x)$ est un germe de courbe holomorphe tangente à V alors on peut la relever à X_1 par $f_{[1]} = (f, [f'])$.
- Par induction, on obtient une tour de variétés (X_k, V_k). $\pi_k : X_k \to X$ est la projection naturelle.

Jets de Demailly-Semple

- Soit X une variété complexe lisse. On part d'une variété dirigée (X, V).
- On définit $X_1 := \mathbb{P}(V)$, et $V_1 \subset T_{X_1}$:

$$V_{1,(x,[v])} := \{\xi \in T_{X_1,(x,[v])} \ ; \ \pi_*\xi \in \mathbb{C}v\}$$

  où $\pi : X_1 \to X$ est la projection naturelle.
- Si $f : (\mathbb{C}, 0) \to (X, x)$ est un germe de courbe holomorphe tangente à V alors on peut la relever à X_1 par $f_{[1]} = (f, [f'])$.
- Par induction, on obtient une tour de variétés (X_k, V_k). $\pi_k : X_k \to X$ est la projection naturelle.
- On a un fibré tautologique $\mathcal{O}_{X_k}(1)$ et on note $u_k := c_1(\mathcal{O}_{X_k}(1))$.

Jets de Demailly-Semple

- Soit $V := T_X$. L'image direct $\pi_{k*}(\mathcal{O}_{X_k}(m))$ est un fibré vectoriel sur X que l'on peut décrire en coordonnées locales de la manière suivante.

Jets de Demailly-Semple

- Soit $V := T_X$. L'image direct $\pi_{k*}(\mathcal{O}_{X_k}(m))$ est un fibré vectoriel sur X que l'on peut décrire en coordonnées locales de la manière suivante.
- Soient $z = (z_1, ..., z_n)$ des coordonnées locales centrées en $x \in X$. Une section locale de $\pi_{k*}(\mathcal{O}_{X_k}(m))$ est un opérateur différentiel algébrique

$$P = \sum_{|\alpha_1|+2|\alpha_2|+...+k|\alpha_k|=m} R_\alpha(z) dz^{\alpha_1} ... d^k z^{\alpha_k}$$

qui est invariant par reparamétrisation i.e

$$P((f \circ \phi)', ..., (f \circ \phi)^{(k)})_t = \phi'(t)^m P(f', ..., f^{(k)})_{\phi(t)}$$

pour tout $\phi \in \mathbb{G}_k$, le groupe des k-jets de biholomorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$.

Jets de Demailly-Semple

- Le fibré vectoriel $\pi_{k*}(\mathcal{O}_{X_k}(m))$ est noté $E_{k,m}$.

Jets de Demailly-Semple

- Le fibré vectoriel $\pi_{k*}(\mathcal{O}_{X_k}(m))$ est noté $E_{k,m}$.
- Ce fibré des différentielles de jets invariantes est un sous-fibré du fibré des différentielles de jets d'ordre k et degré m, $E_{k,m}^{GG} \to X$.

Jets de Demailly-Semple

- Le fibré vectoriel $\pi_{k*}(\mathcal{O}_{X_k}(m))$ est noté $E_{k,m}$.
- Ce fibré des différentielles de jets invariantes est un sous-fibré du fibré des différentielles de jets d'ordre k et degré m, $E_{k,m}^{GG} \to X$.

Exemple

Pour $k = 1$, $E_{1,m} = S^m T_X^*$.

Jets de Demailly-Semple

- Le fibré vectoriel $\pi_{k*}(\mathcal{O}_{X_k}(m))$ est noté $E_{k,m}$.
- Ce fibré des différentielles de jets invariantes est un sous-fibré du fibré des différentielles de jets d'ordre k et degré m, $E_{k,m}^{GG} \to X$.

Exemple

Pour $k = 1$, $E_{1,m} = S^m T_X^*$.

Exemple

Si X est une surface, on a la description suivante de $E_{2,m}$. Soit W le wronskien, $W = dz_1 d^2 z_2 - dz_2 d^2 z_1$, alors tout opérateur différentiel invariant d'ordre 2 et degré m s'écrit

$$P = \sum_{|\alpha|+3k=m} R_{\alpha,k}(z) dz^\alpha W^k.$$

Inégalités de Morse holomorphes

- $L \to X$ un fibré en droites sur une variété compacte Kählérienne de dimension n et $E \to X$ un fibré vectoriel holomorphe de rang r.

Inégalités de Morse holomorphes

- $L \to X$ un fibré en droites sur une variété compacte Kählérienne de dimension n et $E \to X$ un fibré vectoriel holomorphe de rang r.
- On suppose que l'on peut écrire L comme différence de deux fibrés nef $L = F \otimes G^{-1}$.

Inégalités de Morse holomorphes

- $L \to X$ un fibré en droites sur une variété compacte Kählérienne de dimension n et $E \to X$ un fibré vectoriel holomorphe de rang r.
- On suppose que l'on peut écrire L comme différence de deux fibrés nef $L = F \otimes G^{-1}$.

Théorème (Demailly, Siu, Trapani)

- *Inégalités de Morse holomorphes algébriques faibles:*

$$h^q(X, L^{\otimes m} \otimes E) \leq r \frac{m^n}{(m-q)!q!} F^{n-q} \cdot G^q + o(m^n).$$

- *Inégalités de Morse holomorphes algébriques fortes:*

$$\sum_{j=0}^{q} (-1)^{q-j} h^j(X, L^{\otimes m} \otimes E) \leq r \frac{m^n}{n!} \sum_{j=0}^{q} (-1)^{q-j} \binom{n}{j} F^{n-j} \cdot G^j + o(m^n).$$

Inégalités de Morse holomorphes

- En particulier, $L^{\otimes m} \otimes E$ a une section globale pour m grand dès que $F^n - n\,F^{n-1} \cdot G > 0$.

Inégalités de Morse holomorphes

- En particulier, $L^{\otimes m} \otimes E$ a une section globale pour m grand dès que $F^n - n\,F^{n-1} \cdot G > 0$.
- Pour X une variété complexe de dimension 3, on a:

$$\mathrm{Gr}^{\bullet}(E_{3,m}T_X^*) = \bigoplus_{a+3b+5c+6d=m} \Gamma^{(a+b+2c+d,\ b+c+d,\ d)}T_X^*,$$

où Γ est le foncteur de Schur.

Inégalités de Morse holomorphes

- En particulier, $L^{\otimes m} \otimes E$ a une section globale pour m grand dès que $F^n - n\,F^{n-1} \cdot G > 0$.
- Pour X une variété complexe de dimension 3, on a:

$$\mathrm{Gr}^{\bullet}(E_{3,m} T_X^*) = \bigoplus_{a+3b+5c+6d=m} \Gamma^{(a+b+2c+d,\ b+c+d,\ d)} T_X^*,$$

où Γ est le foncteur de Schur.
- $\Gamma^{\lambda} T_X^*$ a même cohomologie qu'un fibré en droites $\mathcal{L}^{\lambda} \to D(T_X^*)$ sur la variété de drapeaux (Bott).

Inégalités de Morse holomorphes

- En particulier, $L^{\otimes m} \otimes E$ a une section globale pour m grand dès que $F^n - n\,F^{n-1} \cdot G > 0$.
- Pour X une variété complexe de dimension 3, on a:

$$\mathrm{Gr}^{\bullet}(E_{3,m}T_X^*) = \bigoplus_{a+3b+5c+6d=m} \Gamma^{(a+b+2c+d,\ b+c+d,\ d)}T_X^*,$$

  où Γ est le foncteur de Schur.
- $\Gamma^{\lambda}T_X^*$ a même cohomologie qu'un fibré en droites $\mathcal{L}^{\lambda} \to D(T_X^*)$ sur la variété de drapeaux (Bott).
- X hypersurface lisse de degré d de $\mathbb{P}^4$, alors par les inégalités de Morse

$$h^2(X, Gr^{\bullet}E_{3,m}T_X^*) \leq Cd(d+13)m^9 + O(m^8)$$

  où C est une constante explicite.

Différentielles de jets invariantes globales

Théorème (R.)

Soit X une hypersurface lisse de degré $d \geq 97$ de $\mathbb{P}^4$ et A un fibré en droites ample, alors il y a des sections globales non nulles de $E_{3,m}T_X^* \otimes A^{-1}$ pour m suffisamment grand et toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ doit satisfaire l'équation différentielle correspondante.

Différentielles de jets invariantes globales

Théorème (R.)

Soit X une hypersurface lisse de degré $d \geq 97$ de $\mathbb{P}^4$ et A un fibré en droites ample, alors il y a des sections globales non nulles de $E_{3,m}T_X^* \otimes A^{-1}$ pour m suffisamment grand et toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ doit satisfaire l'équation différentielle correspondante.

- Généralisation en dimension arbitraire: utiliser à nouveau les inégalités de Morse mais cette fois directement aux fibrés tautologiques sur les espaces de jets.

Différentielles de jets invariantes globales

Théorème (R.)

Soit X une hypersurface lisse de degré $d \geq 97$ de $\mathbb{P}^4$ et A un fibré en droites ample, alors il y a des sections globales non nulles de $E_{3,m}T_X^* \otimes A^{-1}$ pour m suffisamment grand et toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ doit satisfaire l'équation différentielle correspondante.

- Généralisation en dimension arbitraire: utiliser à nouveau les inégalités de Morse mais cette fois directement aux fibrés tautologiques sur les espaces de jets.
- X variété projective lisse et A fibré en droites ample sur X, alors

$$H^0(X, E_{k,m} \otimes A^{-1}) \simeq H^0(X_k, \mathcal{O}_{X_k}(m) \otimes \pi_k^* A^{-1}).$$

Différentielles de jets invariantes globales

Définition

Soit $\pi_{j,k} : X_k \to X_j$ *la projection naturelle du k-ième au j-ième étage dans la tour de Demailly. Pour* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{Z}^k$*, on définit un fibré en droites* $\mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a})$ *sur* X_k *par*

$$\mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a}) := \pi_{1,k}^* \mathcal{O}_{X_1}(a_1) \otimes \pi_{2,k}^* \mathcal{O}_{X_2}(a_2) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}_{X_k}(a_k).$$

Différentielles de jets invariantes globales

Définition

Soit $\pi_{j,k} : X_k \to X_j$ *la projection naturelle du* k*-ième au* j*-ième étage dans la tour de Demailly. Pour* $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^k$*, on définit un fibré en droites* $\mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a})$ *sur* X_k *par*

$$\mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a}) := \pi_{1,k}^* \mathcal{O}_{X_1}(a_1) \otimes \pi_{2,k}^* \mathcal{O}_{X_2}(a_2) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}_{X_k}(a_k).$$

Proposition (Demailly)

Soit $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ *et* $m = a_1 + \cdots + a_k$.

- *On a une injection de faisceaux* $(\pi_{0,k})_* \mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a}) \hookrightarrow \mathcal{O}(E_{k,m})$.

Différentielles de jets invariantes globales

Définition

Soit $\pi_{j,k} : X_k \to X_j$ *la projection naturelle du k-ième au j-ième étage dans la tour de Demailly. Pour* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{Z}^k$*, on définit un fibré en droites* $\mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a})$ *sur* X_k *par*

$$\mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a}) := \pi_{1,k}^* \mathcal{O}_{X_1}(a_1) \otimes \pi_{2,k}^* \mathcal{O}_{X_2}(a_2) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}_{X_k}(a_k).$$

Proposition (Demailly)

Soit $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ *et* $m = a_1 + \cdots + a_k$.

- *On a une injection de faisceaux* $(\pi_{0,k})_* \mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a}) \hookrightarrow \mathcal{O}(E_{k,m})$.
- *Si* $a_1 \geq 3a_2, \ldots, a_{k-2} \geq 3a_{k-1}$ *et* $a_{k-1} \geq 2a_k > 0$*, alors le fibré en droites* $\mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a})$ *est relativement nef au-dessus de* X.

Différentielles de jets invariantes globales

Corollaire

Soit $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ une hypersurface projective lisse et $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ tel que la condition ci-dessus soit satisfaite. Alors $\mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a}) \otimes \pi_{0,k}^* \mathcal{O}_X(l)$ est nef pour $l \geq 2|\mathbf{a}|$ où $|\mathbf{a}| = a_1 + \cdots + a_k$.

Différentielles de jets invariantes globales

Corollaire

Soit $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ une hypersurface projective lisse et $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ tel que la condition ci-dessus soit satisfaite. Alors $\mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a}) \otimes \pi_{0,k}^* \mathcal{O}_X(l)$ est nef pour $l \geq 2|\mathbf{a}|$ où $|\mathbf{a}| = a_1 + \cdots + a_k$.

- Pour obtenir l'existence de différentielles de jets invariantes globales, il suffit donc de montrer l'existence d'un n-uplet $(a_1, \ldots, a_n)$, satisfaisant la condition pour être nef, tel que

$$\begin{aligned}&(\mathcal{O}_{X_n}(\mathbf{a}) \otimes \pi_{0,n}^* \mathcal{O}_X(2|\mathbf{a}|))^{n^2} \\ &- n^2 (\mathcal{O}_{X_n}(\mathbf{a}) \otimes \pi_{0,n}^* \mathcal{O}_X(2|\mathbf{a}|))^{n^2-1} . \pi_{0,n}^* \mathcal{O}_X(2|\mathbf{a}|) > 0,\end{aligned}$$

où $n^2 = \dim X_n$.

Elimination

- La nature inductive de la tour de Demailly permet par un algorithme d'élimination d'exprimer cette quantité finalement comme un polynôme en le degré d de l'hypersurface

Elimination

- La nature inductive de la tour de Demailly permet par un algorithme d'élimination d'exprimer cette quantité finalement comme un polynôme en le degré d de l'hypersurface
- $$\begin{aligned}
&(\mathcal{O}_{X_n}(\mathbf{a}) \otimes \pi_{0,n}^* \mathcal{O}_X(2|\mathbf{a}|))^{n^2} \\
&-n^2(\mathcal{O}_{X_n}(\mathbf{a}) \otimes \pi_{0,n}^* \mathcal{O}_X(2|\mathbf{a}|))^{n^2-1}.\pi_{0,n}^* \mathcal{O}_X(2|\mathbf{a}|) = \\
&(a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n + 2|a|h)^{n^2} \\
&-n^2(a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n + 2|a|h)^{n^2-1}.2|a|h = \\
&P_{a_1,\ldots,a_n}(d) = \sum_{0 \le k \le n+1} p_{k;a_1,\ldots,a_n}.d^k
\end{aligned}$$

Calculs effectifs en dimension arbitraire

- **Idée**: il y a un choix des poids $a_i = a_i(n)$ satisfaisant la relation assurant que le fibré soit nef et dépendant uniquement de la dimension n de manière explicite, tel que les coefficients:

$$p_{k;a_1(n),\dots,a_n(n)} \in \mathbb{Z}[a_1(n), \dots, a_n(n)], 0 \leq k \leq n+1$$

du polynôme correspondant $P_{a_1(n),\dots,a_n(n)}(d)$ peuvent être estimés aussi d'une manière explicite ne dépendant que de n.

Calculs effectifs en dimension arbitraire

- **Idée**: il y a un choix des poids $a_i = a_i(n)$ satisfaisant la relation assurant que le fibré soit nef et dépendant uniquement de la dimension n de manière explicite, tel que les coefficients:

$$p_{k;a_1(n),\dots,a_n(n)} \in \mathbb{Z}[a_1(n),\dots,a_n(n)], 0 \leq k \leq n+1$$

  du polynôme correspondant $P_{a_1(n),\dots,a_n(n)}(d)$ peuvent être estimés aussi d'une manière explicite ne dépendant que de n.
- On obtient une minoration du coefficient dominant, des majorations des autres coefficients.

Calculs effectifs en dimension arbitraire

- **Idée**: il y a un choix des poids $a_i = a_i(n)$ satisfaisant la relation assurant que le fibré soit nef et dépendant uniquement de la dimension n de manière explicite, tel que les coefficients:

$$p_{k;a_1(n),\dots,a_n(n)} \in \mathbb{Z}[a_1(n),\dots,a_n(n)], 0 \leq k \leq n+1$$

  du polynôme correspondant $P_{a_1(n),\dots,a_n(n)}(d)$ peuvent être estimés aussi d'une manière explicite ne dépendant que de n.
- On obtient une minoration du coefficient dominant, des majorations des autres coefficients.

Théorème (Diverio, Merker, R.)

Si $d \geq 2^{n^5}$ alors il existe des opérateurs différentiels algébriques invariants globaux non nuls sur les hypersurfaces lisses de degré d dans $\mathbb{P}^{n+1}$.

Calculs effectifs en dimension arbitraire

- **Idée**: il y a un choix des poids $a_i = a_i(n)$ satisfaisant la relation assurant que le fibré soit nef et dépendant uniquement de la dimension n de manière explicite, tel que les coefficients:

$$p_{k;a_1(n),\dots,a_n(n)} \in \mathbb{Z}[a_1(n),\dots,a_n(n)], 0 \leq k \leq n+1$$

  du polynôme correspondant $P_{a_1(n),\dots,a_n(n)}(d)$ peuvent être estimés aussi d'une manière explicite ne dépendant que de n.
- On obtient une minoration du coefficient dominant, des majorations des autres coefficients.

Théorème (Diverio, Merker, R.)

Si $d \geq 2^{n^5}$ alors il existe des opérateurs différentiels algébriques invariants globaux non nuls sur les hypersurfaces lisses de degré d dans $\mathbb{P}^{n+1}$.

- Généralisations récentes en utilisant les jets de Green-Griffiths de Merker (hypersurfaces), Demailly (cas général).

Dégénérescence algébrique des courbes entières

- $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^{n+1} \times \mathbb{P}^{N_d}$ l'hypersurface universelle de degré d donnée par l'équation

$$\sum_{|\alpha|=d} a_\alpha Z^\alpha = 0, \text{ où } [a] \in \mathbb{P}^{N_d} \text{ et } [Z] \in \mathbb{P}^{n+1}.$$

Dégénérescence algébrique des courbes entières

- $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^{n+1} \times \mathbb{P}^{N_d}$ l'hypersurface universelle de degré d donnée par l'équation

$$\sum_{|\alpha|=d} a_\alpha Z^\alpha = 0, \text{ où } [a] \in \mathbb{P}^{N_d} \text{ et } [Z] \in \mathbb{P}^{n+1}.$$

- $J_n^v(\mathcal{X})$ la sous-variété de $J_n(\mathcal{X})$ des n-jets de $\mathcal{X}$ tangents aux fibres de la projection $\pi : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^{N_d}$.

Dégénérescence algébrique des courbes entières

- $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^{n+1} \times \mathbb{P}^{N_d}$ l'hypersurface universelle de degré d donnée par l'équation

$$\sum_{|\alpha|=d} a_\alpha Z^\alpha = 0, \text{ où } [a] \in \mathbb{P}^{N_d} \text{ et } [Z] \in \mathbb{P}^{n+1}.$$

- $J_n^v(\mathcal{X})$ la sous-variété de $J_n(\mathcal{X})$ des n-jets de $\mathcal{X}$ tangents aux fibres de la projection $\pi : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^{N_d}$.
- Il existe des constantes c_n et $c'_n \in \mathbb{N}$ telles que

$$T_{J_n^v(\mathcal{X})} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(c_n) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_d}}(c'_n)$$

est engendré par ses sections globales. (Voisin, Siu).

Dégénérescence algébrique des courbes entières

- $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^{n+1} \times \mathbb{P}^{N_d}$ l'hypersurface universelle de degré d donnée par l'équation
$$\sum_{|\alpha|=d} a_\alpha Z^\alpha = 0, \text{ où } [a] \in \mathbb{P}^{N_d} \text{ et } [Z] \in \mathbb{P}^{n+1}.$$
- $J_n^v(\mathcal{X})$ la sous-variété de $J_n(\mathcal{X})$ des n-jets de $\mathcal{X}$ tangents aux fibres de la projection $\pi : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^{N_d}$.
- Il existe des constantes c_n et $c_n' \in \mathbb{N}$ telles que
$$T_{J_n^v(\mathcal{X})} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(c_n) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_d}}(c_n')$$
est engendré par ses sections globales. (Voisin, Siu).
- $c_2 = 7$ (Paun)

Dégénérescence algébrique des courbes entières

- $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^{n+1} \times \mathbb{P}^{N_d}$ l'hypersurface universelle de degré d donnée par l'équation

$$\sum_{|\alpha|=d} a_\alpha Z^\alpha = 0, \text{ où } [a] \in \mathbb{P}^{N_d} \text{ et } [Z] \in \mathbb{P}^{n+1}.$$

- $J_n^v(\mathcal{X})$ la sous-variété de $J_n(\mathcal{X})$ des n-jets de $\mathcal{X}$ tangents aux fibres de la projection $\pi : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^{N_d}$.
- Il existe des constantes c_n et $c_n' \in \mathbb{N}$ telles que

$$T_{J_n^v(\mathcal{X})} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(c_n) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_d}}(c_n')$$

  est engendré par ses sections globales. (Voisin, Siu).
- $c_2 = 7$ (Paun)
- $c_3 = 12$ (R.)

Dégénérescence algébrique des courbes entières

- $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^{n+1} \times \mathbb{P}^{N_d}$ l'hypersurface universelle de degré d donnée par l'équation

$$\sum_{|\alpha|=d} a_\alpha Z^\alpha = 0, \text{ où } [a] \in \mathbb{P}^{N_d} \text{ et } [Z] \in \mathbb{P}^{n+1}.$$

- $J_n^v(\mathcal{X})$ la sous-variété de $J_n(\mathcal{X})$ des n-jets de $\mathcal{X}$ tangents aux fibres de la projection $\pi : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^{N_d}$.
- Il existe des constantes c_n et $c_n' \in \mathbb{N}$ telles que

$$T_{J_n^v(\mathcal{X})} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(c_n) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_d}}(c_n')$$

  est engendré par ses sections globales. (Voisin, Siu).
- $c_2 = 7$ (Paun)
- $c_3 = 12$ (R.)
- $c_n = n^2 + 2n$ (Merker)

Dégénérescence algébrique des courbes entières

- On commence avec une section

$$\sigma \in H^0(X, E_{n,m} \otimes K_X^{-\delta m}) \simeq H^0(X_n, \mathcal{O}_{X_n}(m) \otimes \pi_n^* K_X^{-\delta m}).$$

Dégénérescence algébrique des courbes entières

- On commence avec une section

$$\sigma \in H^0(X, E_{n,m} \otimes K_X^{-\delta m}) \simeq H^0(X_n, \mathcal{O}_{X_n}(m) \otimes \pi_n^* K_X^{-\delta m}).$$

- Par semi-continuité on obtient un ouvert de Zariski $U_d \subset \mathbb{P}^{N_d}$ tel que pour tout $a \in U_d$, il existe un diviseur

$$Z_a = (P_a = 0) \subset (\mathcal{X}_a)_n$$

où

$$P_a \in H^0((\mathcal{X}_a)_n, \mathcal{O}_{(\mathcal{X}_a)_n}(m) \otimes \pi_n^* K_{(\mathcal{X}_a)}^{-\delta m})$$

Dégénérescence algébrique des courbes entières

- On commence avec une section

$$\sigma \in H^0(X, E_{n,m} \otimes K_X^{-\delta m}) \simeq H^0(X_n, \mathcal{O}_{X_n}(m) \otimes \pi_n^* K_X^{-\delta m}).$$

- Par semi-continuité on obtient un ouvert de Zariski $U_d \subset \mathbb{P}^{N_d}$ tel que pour tout $a \in U_d$, il existe un diviseur

$$Z_a = (P_a = 0) \subset (\mathcal{X}_a)_n$$

  où

$$P_a \in H^0((\mathcal{X}_a)_n, \mathcal{O}_{(\mathcal{X}_a)_n}(m) \otimes \pi_n^* K_{(\mathcal{X}_a)}^{-\delta m})$$

- On considère P comme une fonction holomorphe sur $J_n^v(\mathcal{X})_{U_d}$.

Dégénérescence algébrique des courbes entières

- On commence avec une section

$$\sigma \in H^0(X, E_{n,m} \otimes K_X^{-\delta m}) \simeq H^0(X_n, \mathcal{O}_{X_n}(m) \otimes \pi_n^* K_X^{-\delta m}).$$

- Par semi-continuité on obtient un ouvert de Zariski $U_d \subset \mathbb{P}^{N_d}$ tel que pour tout $a \in U_d$, il existe un diviseur

$$Z_a = (P_a = 0) \subset (\mathcal{X}_a)_n$$

  où

$$P_a \in H^0((\mathcal{X}_a)_n, \mathcal{O}_{(\mathcal{X}_a)_n}(m) \otimes \pi_n^* K_{(\mathcal{X}_a)}^{-\delta m})$$

- On considère P comme une fonction holomorphe sur $J_n^v(\mathcal{X})_{U_d}$.
- On peut donc trouver des champs de vecteurs $v_1, \ldots, v_m$ tels que la collection des dérivées $D_{v_1} \ldots D_{v_m} P$ fournit suffisamment d'équations différentielles pour forcer la dégénérescence algébrique de toute courbe entière.

Dégénérescence algébrique des courbes entières

- On commence avec une section

$$\sigma \in H^0(X, E_{n,m} \otimes K_X^{-\delta m}) \simeq H^0(X_n, \mathcal{O}_{X_n}(m) \otimes \pi_n^* K_X^{-\delta m}).$$

- Par semi-continuité on obtient un ouvert de Zariski $U_d \subset \mathbb{P}^{N_d}$ tel que pour tout $a \in U_d$, il existe un diviseur

$$Z_a = (P_a = 0) \subset (\mathcal{X}_a)_n$$

  où

$$P_a \in H^0((\mathcal{X}_a)_n, \mathcal{O}_{(\mathcal{X}_a)_n}(m) \otimes \pi_n^* K_{(\mathcal{X}_a)}^{-\delta m})$$

- On considère P comme une fonction holomorphe sur $J_n^v(\mathcal{X})_{U_d}$.
- On peut donc trouver des champs de vecteurs $v_1, \ldots, v_m$ tels que la collection des dérivées $D_{v_1} \ldots D_{v_m} P$ fournit suffisamment d'équations différentielles pour forcer la dégénérescence algébrique de toute courbe entière.
- On peut montrer $codim(Y) \geq 2$ (Diverio-Trapani).

Quelques généralisations

- De meilleures bornes en petites dimensions

Quelques généralisations

- De meilleures bornes en petites dimensions
- Le cas logarithmique en dimension 2 et 3

Quelques généralisations

- De meilleures bornes en petites dimensions
- Le cas logarithmique en dimension 2 et 3
- Le cas de plusieurs variables $f : \mathbb{C}^p \to X$ (avec G. Pacienza)

Quelques généralisations

- De meilleures bornes en petites dimensions
- Le cas logarithmique en dimension 2 et 3
- Le cas de plusieurs variables $f : \mathbb{C}^p \to X$ (avec G. Pacienza)

Problème

Passer à l'étude des applications $f : \Delta^{p-1} \times \mathbb{C} \to X$ où Δ est le disque unité. Cela semble plus délicat mais c'est indispensable pour la p-mesure hyperbolicité.

Structures orbifoldes et hyperbolicité

Théorème (Nevanlinna)

Soient $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{P}^1$ *et* $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N} \cup \infty$. *Si*

$$\sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) > 2,$$

alors toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1$ *qui est ramifiée au-dessus de* a_i *avec une multiplicité au moins* m_i *est constante.*

Structures orbifoldes et hyperbolicité

Théorème (Nevanlinna)

Soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{P}^1$ *et* $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N} \cup \infty$*. Si*

$$\sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) > 2,$$

alors toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1$ *qui est ramifiée au-dessus de* a_i *avec une multiplicité au moins* m_i *est constante.*

- Interprétation géométrique:

$$K_{\mathbb{P}^1} + \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) a_i > 0.$$

Structures orbifoldes et hyperbolicité

Théorème (Nevanlinna)

Soient $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{P}^1$ *et* $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N} \cup \infty$. *Si*

$$\sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) > 2,$$

alors toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1$ *qui est ramifiée au-dessus de* a_i *avec une multiplicité au moins* m_i *est constante.*

- Interprétation géométrique:

$$K_{\mathbb{P}^1} + \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) a_i > 0.$$

- $(\mathbb{P}^1/\Delta)$ est de type général ($\Delta = \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) a_i$).

Structures orbifoldes et hyperbolicité

- **Question (Campana): Peut-on généraliser l'approche de Bogomolov-McQuillan aux surfaces orbifoldes ?**

Structures orbifoldes et hyperbolicité

- **Question (Campana): Peut-on généraliser l'approche de Bogomolov-McQuillan aux surfaces orbifoldes ?**

Théorème (R.)

Soit (X/Δ) une surface orbifolde projective lisse de type général, $\Delta = \sum_i (1 - \frac{1}{m_i}) C_i$. On note $g_i := g(C_i)$ le genre de la courbe C_i et $\overline{c}_1, \overline{c}_2$ les classes de Chern logarithmiques de $(X, \lceil \Delta \rceil)$. Si

$$\overline{c}_1^2 - \overline{c}_2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i}(2g_i - 2 + \sum_{j \neq i} C_i C_j) + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{C_i C_j}{m_i m_j} > 0, \qquad (1)$$

alors il existe une sous-variété propre $Y \subsetneq X$ tel que toute courbe entière orbifolde $f : \mathbb{C} \to X$ vérifie $f(\mathbb{C}) \subset Y$.

Différentielles symétriques orbifoldes

- A (X/Δ) lisse on peut associer une V-variété ou orbifolde au sens usuel, notée $\pi : \mathcal{X} \to X$.

Différentielles symétriques orbifoldes

- A (X/Δ) lisse on peut associer une V-variété ou orbifolde au sens usuel, notée $\pi : \mathcal{X} \to X$.
- On retrouve le faisceau des formes différentielles de Campana

$$\pi_* S^N \Omega_{\mathcal{X}} = S^N \Omega_{(X/\Delta)}.$$

Différentielles symétriques orbifoldes

- A (X/Δ) lisse on peut associer une V-variété ou orbifolde au sens usuel, notée $\pi : \mathcal{X} \to X$.
- On retrouve le faisceau des formes différentielles de Campana

$$\pi_* S^N \Omega_{\mathcal{X}} = S^N \Omega_{(X/\Delta)}.$$

- L'avantage est que l'on peut utiliser la formule de Riemann-Roch orbifolde de T. Kawasaki généralisée par B. Toën:

$$\chi(\mathcal{X}, S^N \Omega_{\mathcal{X}}) = \frac{N^3}{6}(c_1^2 - c_2) + O(N^2),$$

où c_1 and c_2 sont les classes de Chern orbifoldes de $\mathcal{X}$.

Le cas singulier

- La méthode précédente s'applique à toute paire (X/Δ) à laquelle on peut associer une orbifolde $\mathcal{X}$ (au sens usuel).

Le cas singulier

- La méthode précédente s'applique à toute paire (X/Δ) à laquelle on peut associer une orbifolde $\mathcal{X}$ (au sens usuel).
- Exemple: les surfaces orbifoldes (X/Δ) klt (Kawamata log terminales)

Le cas singulier

- La méthode précédente s'applique à toute paire (X/Δ) à laquelle on peut associer une orbifolde $\mathcal{X}$ (au sens usuel).
- Exemple: les surfaces orbifoldes (X/Δ) klt (Kawamata log terminales)

Théorème (Bogomolov-De Oliveira, R.)

Soit $X \subset \mathbb{P}^3$ une surface nodale de degré d avec l noeuds. Si

$$l > \frac{8}{3}\left(d^2 - \frac{5}{2}d\right),$$

alors il existe une sous-variété propre $Y \subset X$ qui contient toute courbe entière orbifolde non-constante $f : \mathbb{C} \to X$.

Le cas singulier

- La méthode précédente s'applique à toute paire (X/Δ) à laquelle on peut associer une orbifolde $\mathcal{X}$ (au sens usuel).
- Exemple: les surfaces orbifoldes (X/Δ) klt (Kawamata log terminales)

Théorème (Bogomolov-De Oliveira, R.)

Soit $X \subset \mathbb{P}^3$ une surface nodale de degré d avec l noeuds. Si

$$l > \frac{8}{3}\left(d^2 - \frac{5}{2}d\right),$$

alors il existe une sous-variété propre $Y \subset X$ qui contient toute courbe entière orbifolde non-constante $f : \mathbb{C} \to X$.

- Donne des exemples de surfaces de degré $d \geq 6$ quasi-hyperboliques mais pas de degré 5 où le nombre de noeuds maximum (Beauville) est 31.

Applications

- Généralisation de résultats de Green, Grauert sur les complémentaires de courbes singulières

Applications

- Généralisation de résultats de Green, Grauert sur les complémentaires de courbes singulières
- Extension des techniques de jets: sur une quintique à 31 noeuds, on peut construire des équations différentielles algébriques globales d'ordre 3.

Applications

- Généralisation de résultats de Green, Grauert sur les complémentaires de courbes singulières
- Extension des techniques de jets: sur une quintique à 31 noeuds, on peut construire des équations différentielles algébriques globales d'ordre 3.

Problème

En utilisant ces méthodes, obtenir un exemple explicite de surface hyperbolique de degré 5*.*

Applications

- Généralisation de résultats de Green, Grauert sur les complémentaires de courbes singulières
- Extension des techniques de jets: sur une quintique à 31 noeuds, on peut construire des équations différentielles algébriques globales d'ordre 3.

Problème

En utilisant ces méthodes, obtenir un exemple explicite de surface hyperbolique de degré 5.

- Variétés faiblement spéciales après Campana-Paun

Courants d'Ahlfors, feuilletages et hyperbolicité

- Motivation: généralisation en dimension supérieure du théorème de Bogomolov-McQuillan

Courants d'Ahlfors, feuilletages et hyperbolicité

- Motivation: généralisation en dimension supérieure du théorème de Bogomolov-McQuillan
- Du côté algébrique

Théorème (Lu-Miyaoka)

Soit X une variété projective lisse. Si X est de type général, alors X n'a qu'un nombre fini de sous-variétés lisses de codimension 1 ayant un diviseur anti-canonique pseudo-effectif. En particulier, X n'a qu'un nombre fini de sous-variétés lisses de codimension 1 qui sont de Fano, abéliennes et Calabi-Yau.

Courants d'Ahlfors, feuilletages et hyperbolicité

- Motivation: généralisation en dimension supérieure du théorème de Bogomolov-McQuillan
- Du côté algébrique

Théorème (Lu-Miyaoka)

Soit X une variété projective lisse. Si X est de type général, alors X n'a qu'un nombre fini de sous-variétés lisses de codimension 1 ayant un diviseur anti-canonique pseudo-effectif. En particulier, X n'a qu'un nombre fini de sous-variétés lisses de codimension 1 qui sont de Fano, abéliennes et Calabi-Yau.

- Le résultat crucial de McQuillan concerne la dégénérescence algébrique des feuilles paraboliques de feuilletages sur les surfaces de type général.

Dégénérescence algébrique

- On étudie les applications holomorphes $f : \mathbb{C}^m \to X$ dans une variété projective X de dimension n tangentes à un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}$ sur X.

Dégénérescence algébrique

- On étudie les applications holomorphes $f : \mathbb{C}^m \to X$ dans une variété projective X de dimension n tangentes à un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}$ sur X.
- On peut associer à f un courant positif fermé de bidimension $(1, 1)$ généralisant le courant introduit par McQuillan dans le cas des courbes entières.

Dégénérescence algébrique

- On étudie les applications holomorphes $f : \mathbb{C}^m \to X$ dans une variété projective X de dimension n tangentes à un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}$ sur X.
- On peut associer à f un courant positif fermé de bidimension $(1,1)$ généralisant le courant introduit par McQuillan dans le cas des courbes entières.

Théorème (Gasbarri, Pacienza, R.)

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage lisse de dimension p sur une variété projective X lisse de type général $p \leq \dim X = n$. Alors il n'existe pas d'application holomorphe $f : \mathbb{C}^p \to X$ tangente à $\mathcal{F}$ et Zariski-dense.

Dégénérescence algébrique

- On étudie les applications holomorphes $f : \mathbb{C}^m \to X$ dans une variété projective X de dimension n tangentes à un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}$ sur X.
- On peut associer à f un courant positif fermé de bidimension $(1,1)$ généralisant le courant introduit par McQuillan dans le cas des courbes entières.

Théorème (Gasbarri, Pacienza, R.)

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage lisse de dimension p sur une variété projective X lisse de type général $p \leq \dim X = n$. Alors il n'existe pas d'application holomorphe $f : \mathbb{C}^p \to X$ tangente à $\mathcal{F}$ et Zariski-dense.

- les feuilletages avec lesquels on travaille n'ont aucune raison d'être lisses

Dégénérescence algébrique

- On étudie les applications holomorphes $f : \mathbb{C}^m \to X$ dans une variété projective X de dimension n tangentes à un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}$ sur X.
- On peut associer à f un courant positif fermé de bidimension $(1, 1)$ généralisant le courant introduit par McQuillan dans le cas des courbes entières.

Théorème (Gasbarri, Pacienza, R.)

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage lisse de dimension p sur une variété projective X lisse de type général $p \leq \dim X = n$. Alors il n'existe pas d'application holomorphe $f : \mathbb{C}^p \to X$ tangente à $\mathcal{F}$ et Zariski-dense.

- les feuilletages avec lesquels on travaille n'ont aucune raison d'être lisses
- En suivant McQuillan on travaille avec des singularités canoniques

Singularités canoniques

Définition (McQuillan)

Soit $(X, \mathcal{F})$ une paire composée d'une variété projective X et d'un feuilletage $\mathcal{F}$. Soit $p : (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}}) \to (X, \mathcal{F})$ un morphisme birationnel. Alors on peut écrire

$$K_{\tilde{\mathcal{F}}} = p^* K_{\mathcal{F}} + \sum a(E, X, \mathcal{F}) E,$$

$a(E, X, \mathcal{F})$ est indépendant du morphisme p et ne dépend que de la valuation discrète associée à E. On l'appelle discrépance de $(X, \mathcal{F})$ en E. Les singularités de $(X, \mathcal{F})$ sont dites canoniques si

$$discrep(X, \mathcal{F}) = \inf\{a(E, X, \mathcal{F})\} \geq 0.$$

Singularités canoniques

Définition (McQuillan)

Soit $(X, \mathcal{F})$ une paire composée d'une variété projective X et d'un feuilletage $\mathcal{F}$. Soit $p : (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}}) \to (X, \mathcal{F})$ un morphisme birationnel. Alors on peut écrire

$$K_{\tilde{\mathcal{F}}} = p^* K_{\mathcal{F}} + \sum a(E, X, \mathcal{F}) E,$$

$a(E, X, \mathcal{F})$ est indépendant du morphisme p et ne dépend que de la valuation discrète associée à E. On l'appelle discrépance de $(X, \mathcal{F})$ en E. Les singularités de $(X, \mathcal{F})$ sont dites canoniques si

$$discrep(X, \mathcal{F}) = \inf\{a(E, X, \mathcal{F})\} \geq 0.$$

- On a des théorèmes de résolution des singularités: en dimension 2 (Seidenberg) et dimension 3 (Cano, McQuillan-Panazzolo).

Dégénérescence algébrique

Théorème (Gasbarri, Pacienza, R.)

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe de codimension 1 sur X variété de type général, $\dim X = n$. *On suppose que $\mathcal{F}$ a au plus des singularités canoniques et que localement $\mathcal{F}$ a une intégrale première holomorphe. Alors toute application holomorphe $f : \mathbb{C}^{n-1} \to X$ tangente à $\mathcal{F}$, de rang générique maximal, n'est pas Zariski-dense.*

Dégénérescence algébrique

Théorème (Gasbarri, Pacienza, R.)

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe de codimension 1 sur X variété de type général, $\dim X = n$. On suppose que $\mathcal{F}$ a au plus des singularités canoniques et que localement $\mathcal{F}$ a une intégrale première holomorphe. Alors toute application holomorphe $f : \mathbb{C}^{n-1} \to X$ tangente à $\mathcal{F}$, de rang générique maximal, n'est pas Zariski-dense.

Corollaire

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe de codimension 1 sur X variété de type général, $\dim X = n$. On suppose que $\mathcal{F}$ a au plus des singularités canoniques et que $codim(Sing\mathcal{F}) \geq 3$. Alors toute application holomorphe $f : \mathbb{C}^{n-1} \to X$ tangente à $\mathcal{F}$, de rang générique maximal, n'est pas Zariski-dense.

Dégénérescence algébrique

Problème

Enlever l'hypothèse d'existence des intégrales premières holomorphes dans le théorème précédent.

Dégénérescence algébrique

Problème

Enlever l'hypothèse d'existence des intégrales premières holomorphes dans le théorème précédent.

- Le théorème de résolution des singularités de Cano impliquera alors la généralisation du résultat de McQuillan en dimension 3: toute application holomorphe $f : \mathbb{C}^2 \to X$ de rang maximal, tangente à un feuilletage sur une variété de type général de dimension 3, est algébriquement dégénérée.