Résumé de thèse

ROUSSEAU Erwan, Université de Bretagne Occidentale (Brest).

Titre de la thèse : Sur la conjecture de Kobayashi et l'hyperbolicité des hypersurfaces projectives en dimension 2 et 3.

COMPOSITION DU JURY:

J.P. DEMAILLY (Grenoble)	rapporteur
J. WINKELMANN (Nancy)	rapporteur
T. LEVASSEUR (Brest)	examinateur
J. HUISMAN (Brest)	examinateur
C. SORGER (Nantes)	examinateur
G. DETHLOFF (Brest)	directeur de thèse

Mes travaux concernent l'hyperbolicité des variétés complexes et l'étude des jets de Demailly-Semple.

En 1970, S.Kobayashi [Ko.70] a posé le problème suivant: Est-il vrai que le complémentaire d'une hypersurface générique de degré $d \geq 2n+1$ dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ est hyperbolique ?

Pour $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, les résultats connus sont que le complémentaire d'une courbe très générique C à k composantes $C_1, ..., C_k$ de degrés $(d_1, ..., d_k)$ est hyperbolique et hyperboliquement plongé dans $\mathbb{P}^2$ dans les cas suivants:
1) $k \geq 5$ et des degrés quelconques [Bab84]
2) $k = 4$ avec des degrés tels que $\sum d_i \geq 5$ ([Gr74], [DSW92])
3) $k = 3$ et $d_1, d_2, d_3 \geq 2$ ([DSW92],[DSW94]); $\sum d_i \geq 5$ ([DL04] et [SY95]).
4) $k = 1$ et $d_1 \geq 15$ ([SY95];[E.G])

La première partie de ma thèse a consisté en l'étude du cas $k = 2$, en utilisant les techniques de jets développées par J.P. Demailly, J. El Goul, G.Dethloff, S.Lu. ([De95] ; [DL96]).

Notions fondamentales: Pour X une variété complexe et V un sous fibré vectoriel holomorphe de T_X, la construction due à J.-P. Demailly de fibrés de k-jets de courbes $X_k = P_k V$ permet d'analyser l'hyperbolicité en termes de négativité de courbure. Le fibré $\pi_k : X_k \to X$ est une tour de fibrés projectifs sur X et il est muni d'un fibré en droites tautologique $\mathcal{O}_{X_k}(1)$. Les images directes $(\pi_k)_* \mathcal{O}_{X_k}(m)$ peuvent être vues comme des fibrés vectoriels d'opérateurs différentiels d'ordre k et de degré m agissant sur les germes de courbes holomorphes dans X tangents à V et invariants par reparamétrage:

pour $f:(\mathbb{C},0)\to X$ un germe d'application holomorphe, on introduit le fibré vectoriel $E^{GG}_{k,m}V^*\to X$ dont les fibres sont les polynômes à valeurs complexes $Q(f',f'',...,f^{(k)})$ sur les fibres de J_kV, fibré des germes de courbes d'ordre k sur X tangentes à V, de poids m par rapport à l'action de $\mathbb{C}^*$:

$$Q(\lambda f',\lambda^2 f'',...,\lambda^k f^{(k)})=\lambda^m Q(f',f'',...,f^{(k)}).$$

On définit le sous-fibré $E_{k,m}V^*\subset E^{GG}_{k,m}V^*$, appelé le fibré des opérateurs différentiels invariants d'ordre k et de degré m, i.e:

$$Q((f\circ\phi)',(f\circ\phi)'',...,(f\circ\phi)^{(k)})=\phi'(0)^m Q(f',f'',...,f^{(k)})$$

pour tout $\phi\in G_k$ le groupe des germes de k jets de biholomorphismes de $(\mathbb{C},0)$.

Les jets de Demailly-Semple possèdent de nombreuses propriétés qui en font des outils efficaces pour étudier certains problèmes géométriques. Ainsi, j'ai montré qu'ils permettaient de désingulariser les germes de courbes.

J.-P. Demailly a démontré que pour tout opérateur différentiel P de ce type, à valeurs dans le dual d'un fibré en droites ample, toute courbe entière $f:\mathbb{C}\to X$ tangente à V vérifie l'équation différentielle $P(f)=0$. Ce résultat précise l'approche de Green et Griffiths [GG80]. L'utilisation de ces outils a permis à J.-P. Demailly et J. El Goul de prouver l'hyperbolicité des surfaces très génériques de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ de degré $d\geq 21$ [DEG00] et, par l'analogue logarithmique, J. El Goul a montré que le complémentaire d'une courbe très générique de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de degré $d\geq 15$ est hyperbolique et hyperboliquement plongé dans $\mathbb{P}^2$.

Hyperbolicité du complémentaire dans $\mathbb{P}^2$ d'une courbe à deux composantes

L'étude de l'hyperbolicité du complémentaire dans $\mathbb{P}^2$ d'une courbe à deux composantes est fondée sur l'utilisation des jets logarithmiques, développés par Dethloff et Lu et utilisés par El Goul dans le cas d'une seule composante. Le résultat principal de cette étude que j'ai obtenu est:

Théorème *Le complémentaire d'une courbe trés générique à deux composantes de degrés $d_1\leq d_2$ dans $\mathbb{P}^2$ est hyperbolique pour:*
1) $d_1\geq 5$
2) $d_1=4$ *et* $d_2\geq 7$
3) $d_1=4$ *et* $d_2=4$
4) $d_1=3$ *et* $d_2\geq 9$
5) $d_1=2$ *et* $d_2\geq 12$.

Ce résultat a donné lieu à une publication aux **Comptes Rendus Mathématiques de l'Académie des Sciences en 2003 (Ser. I 336 (2003) 635-640)**:

"Hyperbolicité du complémentaire d'une courbe : le cas de deux composantes".

Etude des jets de Demailly-Semple en dimension 3

La deuxième partie de ma thèse est constituée par l'étude des jets de Demailly-Semple en dimension 3 dans la perspective d'attaquer le problème de l'hyperbolicité des hypersurfaces projectives génériques de grand degré de dimension 3 pour lequel il n'y a pas encore de résultats.
Cette étude est fondée sur l'utilisation de la théorie de la représentation. Si on définit $A_k = \underset{m}{\oplus}(E_{k,m}T_X^*)_x$ l'algèbre des opérateurs différentiels en un point $x \in X$, celle-ci peut-être vue comme une représentation du groupe linéaire Gl_n. On sait alors que l'on a une décomposition de cette représentation en somme directe de représentations irréductibles de Schur. Ainsi Demailly [De95] a caractérisé les fibrés de jets d'ordre 2, de degré m:

$$Gr^\bullet E_{2,m}T_X^* = \underset{\lambda_1+2\lambda_2=m}{\oplus} \Gamma^{(\lambda_1,\lambda_2,0)}T_X^*,$$

où Γ est le foncteur de Schur.
L'étude algébrique de A_3, par la théorie classique des invariants, m'a permis d'obtenir une caractérisation des jets d'ordre 3, en dimension 3:

Théorème *En dimension 3:*

$$A_3 = \mathbb{C}[f_i', w_{ij}, w_{ij}^k, W],\ 1 \leq i < j \leq 3, 1 \leq k \leq 3$$

où $W = \begin{vmatrix} f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \\ f_1''' & f_2''' & f_3''' \end{vmatrix}, w_{ij} = f_i'f_j'' - f_i''f_j',$
$w_{ij}^k = (f_k')^4 d(\frac{w_{ij}}{(f_k')^3}) = f_k'(f_i'f_j''' - f_i'''f_j') - 3f_k''(f_i'f_j'' - f_i''f_j').$

Cette étude algébrique a conduit à des applications géométriques au niveau des fibrés de jets.
Le résultat principal que j'ai obtenu est la caractérisation du gradué du fibré des jets d'ordre 3 en dimension 3:

Théorème *Soit X une variété complexe de dimension 3:*
Alors:

$$Gr^\bullet E_{3,m}T_X^* = \underset{0\leq\gamma\leq\frac{m}{5}}{\oplus}\Big(\underset{\{\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=m-\gamma;\ \lambda_i-\lambda_j\geq\gamma,\ i<j\}}{\oplus}\Gamma^{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}T_X^*\Big)$$

où Γ est le foncteur de Schur.

Un calcul de type Riemann-Roch fournit alors:

Proposition

$$\chi(X, E_{3,m}T_X^*) = \frac{m^9}{81648 \times 10^6} d(389d^3 - 20739d^2 + 185559d - 358873) + O(m^8)$$

Corollaire *Pour* $d \geq 43$, $\chi(X, E_{3,m}T_X^*) \sim \alpha(d)m^9$ *avec* $\alpha(d) > 0$.

Pour obtenir l'existence de suffisamment d'opérateurs différentiels, une étude de la cohomologie s'avère nécessaire contrairement au cas de la dimension 2 où des théorèmes d'annulation dus à Bogomolov permettaient de conclure [Bo79].
L'étude en dimension 3 a montré la nécessité de considérer les jets d'ordre 3. En effet, l'utilisation des complexes de Schur m'a permis d'obtenir le résultat suivant qui illustre l'idée plus générale qu'en dimension n, il faut étudier les jets d'ordre n:

Théorème: *Soit* X *une hypersurface lisse et irréductible de degré* $d \geq 2$ *de* $\mathbb{P}^4$.
Alors:

$$H^0(X, E_{2,m}T_X^*) = 0.$$

Autrement dit, il n'y a pas de jets de différentielles d'ordre 2 défini globalement sur X.

J'ai montré qu'on pouvait utiliser les théorèmes d'annulation classiques pour obtenir le résultat

Théorème *Soit* $X \subset \mathbb{P}^4$ *une hypersurface lisse et irréductible de degré* d.
Alors pour $q \geq 1$,

$$H^q(X, \Gamma^{(a_1,a_2,a_3)}T_X^*) = 0 \textit{ pour } a_3(d-1) > 2(a_1 + a_2) + 3(d-1).$$

L'étude m'a permis de constater que contrairement au cas des jets d'ordre 2 en dimension 2, on ne peut espérer avoir $H^2(X, Gr^\bullet E_{3,m}T_X^*) = 0$ car pour tout m suffisamment grand, il existe $H^2(X, \Gamma^{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}T_X^*) \neq 0$ par la

Proposition *Soit* $X \subset \mathbb{P}^4$ *une hypersurface lisse et irréductible de degré* $d \geq 6$.
Alors

$$h^2(X, S^mT_X^*) \underset{+\infty}{\sim} (-\frac{7}{24}d + \frac{1}{8}d^2)m^5.$$

La perspective de ce travail est, après avoir démontré l'existence d'opérateurs différentiels à valeur dans le dual d'un fibré ample, d'obtenir des résultats sur l'hyperbolicité des hypersurfaces génériques de $\mathbb{P}^4$ de degré suffisamment grand.

Références

[Bab84]: Babets V.A., *Picard type theorems for holomorphic mappings*, Siberian Math.J. 25 (1984), 195-200.

[Bo79]: Bogomolov F.A., *Holomorphic tensors and vector bundles on projective varieties*, Math. USSR Izvestija 13 (1979), 499-555.

[De95]: Demailly J.-P., *Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials*, Proc. Sympos. Pure Math., vol.62, Amer. Math.Soc., Providence, RI (1997), 285-360.

[DEG00]: Demailly J.-P., El Goul J., *Hyperbolicity of generic surfaces of high degree in projective 3-space*, Amer. J. Math 122 (2000), 515-546.

[DL04]: Dethloff G., Lu. S, *Logarithmic surfaces and hyperbolicity*, prépublication 2004, 23 pages.

[DL96]: Dethloff G., Lu. S, *Logarithmic jet bundles and applications*, Osaka J. of Math. 38 (2001), 185-237.

[DSW92]: Dethloff G., Schumacher G., Wong P.M., *Hyperbolicity of the complement of plane algebraic curves*, Amer. J. Math 117 (1995), 573-599.

[DSW94]: Dethloff G., Schumacher G., Wong P.M., *On the hyperbolicity of the complements of curves in algebraic surfaces: the three component case*, Duke. Math., 78 (1995), 193-212.

[E.G]: El Goul J., *Logarithmic Jets and Hyperbolicity*, Osaka J.Math. 40 (2003), 469-491.

[GG74]: Green. M. , *On the functional equation* $f^2 = e^{2\phi_1} + e^{2\phi_2} + e^{2\phi_3}$ *and a new Picard theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. 195 (1974), 223-230.

[GG80]: Green M., Griffiths P., *Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings*, The Chern Symposium 1979, Proc. Internal. Sympos. Berkeley, CA, 1979, Springer-Verlag, New-York (1980), 41-74.

[Ko70]: Kobayashi S., *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings, Marcel Dekker*, New York, 1970.

[SY95]: Siu Y.-T., Yeung S.K. , *Hyperbolicity of the complement of a generic smooth curve of high degree in the complex projective plane*, Invent. Math. 124 (1996), 573-618.