INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
Université de Strasbourg

Mémoire présenté pour obtenir le
diplôme d'Habilitation à Diriger des Recherches

Autour de l'hyperbolicité en géométrie complexe

par

Erwan ROUSSEAU

Soutenu le 17 Novembre 2010 devant le jury composé de

Frédéric CAMPANA
Olivier DEBARRE
Jean-Pierre DEMAILLY
Gerd-Eberhard DETHLOFF
Julien DUVAL
Carlo GASBARRI

au vu des rapports de Jean-Pierre DEMAILLY, Julien DUVAL et Junjiro NOGUCHI.

Remerciements

Je remercie très sincèrement Jean-Pierre Demailly, Julien Duval et Junjiro Noguchi qui ont accepté de rapporter sur mes travaux, ainsi que Frédéric Campana, Olivier Debarre, Gerd Dethloff et Carlo Gasbarri qui ont accepté de faire partie du jury.

Ma gratitude va aussi à ceux avec qui j'ai eu le plaisir de travailler : Simone Diverio, Carlo Gasbarri, Joël Merker et Gianluca Pacienza.

Je tiens aussi à remercier Michael McQuillan pour l'attention qu'il a portée à mon travail et avec qui les discussions ont été très stimulantes. Je pense également aux membres du projet ANR COMPLEXE auquel j'ai le plaisir de participer.

Je remercie tous les collègues et personnels de l'IRMA qui font de cet endroit un lieu très chaleureux.

À Johanna

Table des matières

Publications

Articles originaux présentés

- E. Rousseau : *Equations différentielles sur les hypersurfaces de* $\mathbb{P}^4$, J. Math. Pures Appl. (9) 86 (2006), no. 4, 322–341.
- E. Rousseau : *Weak analytic hyperbolicity of generic hypersurfaces of high degree in* $\mathbb{P}^4$, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 16 (2007), no. 2, 369–383.
- E. Rousseau : *Weak analytic hyperbolicity of complements of generic surfaces of high degree in projective 3-space*, Osaka J. Math. 44 (2007), no. 4, 955–971.
- G. Pacienza, E. Rousseau : *On the logarithmic Kobayashi conjecture*, J. Reine Angew. Math. 611 (2007), 221–235.
- E. Rousseau : *Logarithmic vector fields and hyperbolicity*, Nagoya Math. J. 195 (2009), 21–40.
- E. Rousseau : *Hyperbolicity of geometric orbifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), no. 7, 3799–3826.
- S. Diverio, J. Merker, E. Rousseau : *Effective algebraic degeneracy*, Invent. Math. 180 (2010), no. 1, 161-223.
- G. Pacienza, E. Rousseau : *Generalized Demailly-Semple jet bundles and holomorphic mappings into complex manifolds*, à paraître au J. Math. Pures Appl.
- E. Rousseau : *Degeneracy of holomorphic maps via orbifolds*, à paraître au Bull. Soc. Math. France.
- C. Gasbarri, G.Pacienza, E. Rousseau : *Higher dimensional tautological inequalities and applications*, prépublication, 2010.

Articles originaux non présentés

– E. Rousseau : *Hyperbolicité du complémentaire d'une courbe : le cas de deux composantes*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 336 (2003), no. 8, 635–640.
– E. Rousseau : *Etude des jets de Demailly-Semple en dimension 3*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 56 (2006), no. 2, 397–421.

Introduction

Dans ce mémoire, je présente mes travaux de recherche autour de l'hyperbolicité en géométrie complexe. Nous y décrivons les résultats obtenus sur des questions liées à la géométrie des courbes entières dans les variétés algébriques. Les thèmes de recherche liés à l'hyperbolicité en géométrie complexe sont très actuels notamment par les liens fascinants qu'ils ont avec la géométrie arithmétique. A la suite de Lang et Vojta, on dispose de conjectures sur les liens entre hyperbolicité analytique et arithmétique e.g. la densité des courbes entières et celle des points rationnels. Mon étude est composée de trois parties, chacune d'entre elles décrivant une approche possible du problème de l'hyperbolicité. Au fil du texte, nous soumettons également quelques questions inspirées des résultats obtenus et qui pourraient être l'objet de recherches ultérieures.

Pour démontrer l'hyperbolicité (au sens de Kobayashi) d'une variété projective complexe, i.e. l'absence de courbes entières non-constantes, il est maintenant classique, depuis les idées développées par A. Bloch, qu'une stratégie possible est de montrer que les courbes entières dans cette variété vérifient suffisamment d'équations différentielles algébriques. A la suite des travaux de Green-Griffiths, ces équations différentielles appelées **différentielles de jets** apparaissent comme sections de certains fibrés vectoriels sur la variété. La première partie de mes travaux a été consacrée à l'étude des fibrés de différentielles de jets et à leurs applications à l'hyperbolicité des hypersurfaces (et leurs complémentaires) de grand degré de l'espace projectif complexe. L'une des motivations principales est la conjecture suivante énoncée par S. Kobayashi :

Conjecture de Kobayashi. *Soit $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ une hypersurface générique de degré d.*

1. *Si $d \geq 2n+1$, $n \geq 2$, alors X est hyperbolique.*
2. *Si $d \geq 2n+3$ alors $\mathbb{P}^{n+1} \setminus X$ est hyperbolique.*

Lorsque j'ai commencé mes travaux, les seuls résultats connus concernaient la dimension 2 (Dethloff-Schumacher-Wong, Siu-Yeung, Demailly-El Goul, McQuillan). La situation en dimension supérieure est plus compliquée et la structure même des objets était mal comprise. L'objet de la première partie est donc de présenter les résultats obtenus en dimension supérieure par les techniques de différentielles de jets.

Dans la seconde partie, nous présentons une approche plus récente de ces questions motivée par les travaux de Campana. Celui-ci a raffiné les conjectures de Lang et Vojta en introduisant des **structures orbifoldes** généralisées et a proposé une nouvelle classification des variétés algébriques complexes faisant apparaître l'importance de ces structures orbifoldes. Cette géométrie est particulièrement intéressante du point de vue des questions d'hyperbolicité puisqu'elle met en évidence la décomposition des variétés algébriques en une partie "hyperbolique" et une partie "non-hyperbolique".

Dans mon approche, j'ai développé un point de vue faisant le lien avec les structures orbifoldes au sens classique i.e. les cartes locales sont des quotients par des groupes finis, cas particulier de champ algébrique de Deligne-Mumford. Alors, on dispose des objets de la géométrie "orbifolde" où l'on peut notamment développer les techniques de différentielles de jets de la première partie. Récemment, par des techniques similaires, Miyaoka a obtenu des résultats sur le degré canonique des courbes algébriques dans les surfaces de type général. Le point clef de son travail est l'utilisation d'une inégalité de Miyaoka-Yau orbifolde pour les paires logarithmiques. Mon approche montre que ce point de vue est également utile pour obtenir des résultats sur la dégénérescence des courbes transcendantes dans les paires logarithmiques.

Dans la troisième partie, nous présentons une généralisation de l'approche de McQuillan développée dans ses travaux sur la conjecture de Green-Griffiths :

Conjecture de Green-Griffiths, Lang. *Soit X une variété projective de type général. Alors il existe une sous-variété $Y \subsetneq X$ telle que toute courbe entière non-constante $f : \mathbb{C} \to X$ vérifie $f(\mathbb{C}) \subset Y$.*

Dans le cas des surfaces, McQuillan a introduit les **courants d'Ahlfors** associés aux courbes entières, permettant de traduire la théorie de Nevanlinna en une théorie de l'intersection. Ces courants lui ont permis d'obtenir la dégénérescence des courbes entières dans les surfaces de type général dont le fibré cotangent est gros. Cela revient à comprendre la géométrie des courbes entières qui sont feuilles de feuilletages sur ces surfaces et peut être vu comme la version transcendante du résultat de Bogomolov sur la finitude des courbes rationnelles et elliptiques sur ces surfaces.

Il est alors naturel et important d'étudier ces questions en dimension supérieure. La version algébrique a été étudiée par Lu-Miyaoka. Ils ont montré en particulier que sur des variétés algébriques de type général, il n'y a qu'un nombre fini de sous-variétés lisses de codimension 1 dont le fibré anti-canonique est pseudo-effectif.

Dans cette dernière partie, nous regardons des versions transcendantes de ce résultat, ce qui revient à étudier les applications holomorphes qui sont tangentes à des feuilletages sur des variétés algébriques. Pour cela, nous développons la théorie des courants d'Ahlfors dans ce cadre.

Chapitre 1

Espaces de jets et hyperbolicité

1.1 Quelques rappels sur l'hyperbolicité en géométrie complexe

Les problèmes liés à l'hyperbolicité en géométrie complexe ont déjà une longue histoire. On peut les faire remonter au "petit théorème de Picard" et à l'étude de l'hyperbolicité des surfaces de Riemann compactes de genre $g \geq 2$.

Définition 1.1.1. *Une variété complexe X est hyperbolique au sens de Brody s'il n'existe pas de courbes entières non constantes $g : \mathbb{C} \to X$.*

On sait munir le disque unité Δ, d'une métrique à courbure constante -1. C'est la métrique de Poincaré définie par

$$ds^2 = \frac{dzd\overline{z}}{(1 - |z|^2)^2}.$$

Etant donnée une surface de Riemann hyperbolique S, il est facile de la munir d'une métrique à courbure constante -1 : c'est la métrique induite par la métrique de Poincaré sur le revêtement universel Δ.

Plus généralement, on peut munir toute variété complexe, d'une (pseudo) métrique intrinsèque qui possède des propriétés similaires à celles du lemme de Schwarz [26].

Définition 1.1.2. *Soit X une variété complexe lisse, $\xi \in T_{X,x}$ un vecteur tangent à X en x. On définit sa pseudo-norme de Kobayashi par*

$$k(\xi) = \inf_{\lambda}\{\lambda > 0 / \exists f : \Delta \to X, f(0) = x, \lambda f'(0) = \xi\}.$$

La pseudo-distance de Kobayashi d_X est la pseudo-distance géodésique obtenue en intégrant cette pseudo-norme.

Remarque 1.1.3. *La définition originale donnée par S. Kobayashi (équivalente à la précédente par Royden [46]) est la suivante : pour calculer la distance de Kobayashi entre deux points $p, q \in X$, on construit une chaîne d'applications $f_i : \Delta \to X$, $1 \leq i \leq n$, avec deux points p_i, q_i, où $f_1(p_1) = p$, $f_n(q_n) = q$ et $f_i(q_i) = f_{i+1}(p_{i+1})$. Sa longueur est*

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(p_i, q_i),$$

où ρ est la distance de Poincaré. Alors la pseudo-distance de Kobayashi est la borne infèrieure de ces longueurs, par rapport à toutes les chaînes possibles.

Définition 1.1.4. *Une variété complexe X est hyperbolique au sens de Kobayashi si d_X est une distance.*

Si l'on dispose d'une application entière non constante $f : \mathbb{C} \to X$ alors X ne peut pas être hyperbolique au sens de Kobayashi. Ainsi, l'hyperbolicité au sens de Kobayashi implique l'hyperbolicité au sens de Brody. La réciproque est également vraie si X est compacte :

Théorème 1.1.5 ([5]). *Une variété complexe compacte X est hyperbolique si et seulement si elle est hyperbolique au sens de Brody.*

1.2 Hyperbolicité algébrique

1.2.1 Le cas compact

L'hyperbolicité impose de fortes restrictions géométriques. En particulier elle limite le type de sous-variétés qui peuvent apparaître. Ceci motive la notion d'*hyperbolicité algébrique* introduite par Demailly :

Définition 1.2.1 ([14]). *Soit X une variété lisse complexe compacte munie d'une métrique hermitienne dont la (1,1)-forme positive associée est ω. On dit que X est algébriquement hyperbolique si il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute courbe compacte irréductible on ait*

$$-\chi(\overline{C}) = 2g(\overline{C}) - 2 \geq \varepsilon \deg_\omega(C),$$

où $g(\overline{C})$ est le genre de la normalisation de C, $\chi(\overline{C})$ sa caractéristique d'Euler et $\deg_\omega(C) = \int_C \omega$. (Cette propriété est indépendante de ω).

Alors, on a

Proposition 1.2.2 ([14]). *Si X est hyperbolique alors X est algébriquement hyperbolique.*

1.2.2 Le cas logarithmique

Soit X une variété complexe lisse et $D \subset X$ un diviseur à croisements normaux i.e en tout point x de D, on peut trouver des coordonnées $z_1, ..., z_n$ telles que $D = \{z_1...z_l = 0\}$. On appelle (X, D) variété logarithmique.

Définition 1.2.3. *Soit (X, D) une variété logarithmique, ω une métrique hermitienne sur X. On dit que $X \setminus D$ est hyperboliquement plongée dans X s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tous $x \in X \setminus D$, $\xi \in T_{X,x}$*

$$k_{X \setminus D}(\xi) \geq \varepsilon \left\|\xi\right\|_\omega .$$

Définition 1.2.4 ([12])**.** *Soit (X, D) une variété logarithmique. Pour chaque courbe $C \subset X, C \nsubseteq D$, soit $\nu : \widetilde{C} \to C$ la normalisation de C. Alors on définit $i(C, D)$ comme le nombre de points distincts dans $\nu^{-1}(D)$.*

Définition 1.2.5. *Soit (X, D) une variété logarithmique, ω une métrique hermitienne sur X. (X, D) est algébriquement hyperbolique s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$2g(\widetilde{C}) - 2 + i(C, D) \geq \varepsilon \deg_\omega(C),$$

pour toute courbe $C \subset X, C \nsubseteq D$.

Avec Pacienza, nous avons montré

Proposition 1.2.6 ([36])**.** *Soit (X, D) une variété logarithmique telle que $X \setminus D$ soit hyperbolique et hyperboliquement plongée dans X. Alors (X, D) est algébriquement hyperbolique.*

1.2.3 Hyperbolicité algébrique des hypersurfaces et des complémentaires d'hypersurfaces de l'espace projectif

S. Kobayashi a proposé les conjectures suivante pour les hypersurfaces de l'espace projectif

Conjecture 1.2.7. *Une hypersurface générique $X_d \subset \mathbb{P}^n$ $(n \geq 3)$ de degré d est hyperbolique pour $d \geq 2n - 1$.*

Conjecture 1.2.8. *$\mathbb{P}^n \setminus X_d$ est hyperbolique pour X_d hypersurface générique de degré $d \geq 2n + 1$.*

Dès la dimension 2, ces conjectures sont très difficiles à montrer donc dans un premier temps, il est intéressant de regarder si ces configurations vérifient les propriétés conjecturalement équivalentes à l'hyperbolicité comme l'hyperbolicité algébrique ou mieux la conjecture de Lang

Conjecture 1.2.9 ([27]). *Une variété projective X est hyperbolique si et seulement si toutes ses sous-variétés (et X elle-même) sont de type général i.e dont le fibré canonique est gros.*

Ce travail a été fait dans le cas compact par Clemens [13], Pacienza [35] et Voisin [51], [50], [52] :

Théorème 1.2.10 ([35]). *Toutes les sous variétés d'une hypersurface très générique de degré $d \geq 2n-1, n \geq 4$ et $d \geq 6, n = 3$, dans $\mathbb{P}^n$ sont de type général.*

Le point de départ d'une preuve possible est une technique développée par Voisin [50]. Soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{N_d}$ l'hypersurface universelle de $\mathbb{P}^n$ de degré d. Alors

Proposition 1.2.11 ([48]). *Le fibré vectoriel $T_{\mathcal{X}} \otimes p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ est engendré par ses sections globales, où p est la projection $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{N_d} \to \mathbb{P}^n$.*

On peut alors montrer :

Théorème 1.2.12 ([35]). *Soit X une hypersurface très générale de degré $d \geq 2n-2$, $n \geq 6$ de $\mathbb{P}^n$ et Y une sous-variété de X, avec pour désingularisation $v : \widetilde{Y} \to Y$. Alors*

$$H^0(\widetilde{Y}, K_{\widetilde{Y}} \otimes v^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)) \neq 0.$$

Un corollaire est

Corollaire 1.2.13. *Une hypersurface très générique de degré $d \geq 2n-2$, $n \geq 6$ dans $\mathbb{P}^n$ est algébriquement hyperbolique.*

Je me suis intéressé au cas logarithmique avec Pacienza. En généralisant à ce contexte l'approche de Voisin, nous avons obtenu

Théorème 1.2.14 ([36]). *Soit X_d une hypersurface très générique de degré $d \geq 2n+1$ dans $\mathbb{P}^n$. Alors toutes les sous-variétés logarithmiques (Y, D) de $(\mathbb{P}^n, X_d)$ $(D = Y \cap X_d)$ sont de type log-général i.e pour toute résolution $\nu : \widetilde{Y} \to Y$ de (Y, D) le fibré canonique logarithmique $K_{\widetilde{Y}}(\nu^{-1}(D))$ est gros.*

Théorème 1.2.15 ([36]). *Soit X_d une hypersurface très générique de degré $d \geq 2n+1$ dans $\mathbb{P}^n$. Alors $(\mathbb{P}^n, X_d)$ est algébriquement hyperbolique.*

1.3 Espaces de jets et opérateurs différentiels

Soit X une variété complexe de dimension n. On définit le fibré $J_k \to X$ des k-jets de germes de courbes dans X, comme étant l'ensemble des classes d'équivalence des applications holomorphes $f : (\mathbb{C}, 0) \to (X, x)$ modulo la relation d'équivalence suivante : $f \sim g$ si et seulement si toutes les dérivées $f^{(j)}(0) = g^{(j)}(0)$ coïncident pour $0 \leq j \leq k$. L'application projection $J_k \to X$ est simplement $f \to f(0)$. Grâce à la formule de Taylor appliquée à un germe f au voisinage d'un point $x \in X$, on peut identifier $J_{k,x}$ à l'ensemble des $k-$uplets de vecteurs $(f'(0), ..., f^{(k)}(0)) \in \mathbb{C}^{nk}$. Ainsi, J_k est un fibré holomorphe sur X de fibre $\mathbb{C}^{nk}$. On peut voir qu'il ne s'agit pas d'un fibré vectoriel pour $k \geq 2$ (pour $k = 1$, c'est simplement le fibré tangent T_X).

Définition 1.3.1. *Soit (X, V) une variété dirigée i.e $V \subset T_X$ est un sous-fibré vectoriel. Le fibré $J_kV \to X$ est l'espace des $k-$jets de courbes $f : (\mathbb{C}, 0) \to X$ tangentes à V, c'est-à-dire telles que $f'(t) \in V_{f(t)}$ pour t au voisinage de* 0, *l'application projection sur X étant $f \to f(0)$.*

1.3.1 Construction

Nous présentons la construction des espaces de jets introduits par J.-P. Demailly dans [14].

Soit (X, V) une variété dirigée. On définit (X', V') par :
i) $X' = P(V)$
ii) $V' \subset T_{X'}$ est le sous-fibré tel que pour chaque point $(x, [v]) \in X'$ associé à un vecteur $v \in V_x \backslash \{0\}$ on a :

$$V'_{(x,[v])} = \{\xi \in T_{X'}; \pi_* \xi \in \mathbb{C}v\},$$

où $\pi : X' \to X$ est la projection naturelle et $\pi_* : T_{X'} \to \pi^* T_X$. Le fibré V' est caractérisé par les deux suites exactes

$$\begin{aligned} 0 &\to T_{X'/X} \to V' \xrightarrow{\pi_*} \mathcal{O}_{X'}(-1) \to 0, \\ 0 &\to \mathcal{O}_{X'} \to \pi^* V \otimes \mathcal{O}_{X'}(1) \to T_{X'/X}. \end{aligned}$$

La deuxième suite exacte est une version relative de la suite exacte d'Euler associée au fibré tangent des fibres $P(V_x)$. On définit par récurrence le fibré de k-jets projectivisé $P_kV = X_k$ et le sous-fibré associé $V_k \subset T_{X_k}$ par : $(X_0, V_0) = (X, V), (X_k, V_k) = (X'_{k-1}, V'_{k-1})$. On a par construction :

$$\dim(X_k) = n + k(r - 1),$$

$$\text{rang}(V_k) = r := \text{rang}(V).$$

Soit π_k la projection naturelle $\pi_k : X_k \to X_{k-1}$, on notera $\pi_{j,k} : X_k \to X_j$ la composition $\pi_{j+1} \circ \pi_{j+2} \circ ... \circ \pi_k$, pour $j \leq k$.

Par définition, il y a une injection canonique $\mathcal{O}_{P_kV}(-1) \hookrightarrow \pi_k^* V_{k-1}$ et on obtient un morphisme de fibrés en droites

$$\mathcal{O}_{P_kV}(-1) \to \pi_k^* V_{k-1} \overset{(\pi_k)^*(\pi_{k-1})_*}{\to} \pi_k^* \mathcal{O}_{P_{k-1}V}(-1),$$

qui admet

$$D_k = P(T_{P_{k-1}V/P_{k-2}V}) \subset P_kV,$$

comme diviseur de zéros
Ainsi, on a :

$$\mathcal{O}_{P_kV}(1) = \pi_k^* \mathcal{O}_{P_{k-1}V}(1) \otimes \mathcal{O}(D_k).$$

Remarque 1.3.2. *Chaque application non constante $f : \Delta_R \to X$ de (X, V) se relève en $f_{[k]} : \Delta_R \to P_kV$.*

1.3.2 Opérateurs différentiels sur les jets

En suivant Green-Griffiths [23], on introduit le fibré vectoriel des différentielles de jets, d'ordre k et de degré m, $E_{k,m}^{GG} V^* \to X$ dont les fibres sont les polynômes à valeurs complexes $Q(f', f'', ..., f^{(k)})$ sur les fibres de J_kV, de poids m par rapport à l'action de $\mathbb{C}^*$:

$$Q(\lambda f', \lambda^2 f'', ..., \lambda^k f^{(k)}) = \lambda^m Q(f', f'', ..., f^{(k)}),$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $(f', f'', ..., f^{(k)}) \in J_kV$.

$E_{k,m}^{GG} V^*$ admet une filtration canonique dont les termes gradués sont

$$Gr^l(E_{k,m}^{GG} V^*) = S^{l_1} V^* \otimes S^{l_2} V^* \otimes ... \otimes S^{l_k} V^*,$$

où $l := (l_1, l_2, ..., l_k) \in \mathbb{N}^k$ vérifie $l_1 + 2l_2 + ... + kl_k = m$.

Demailly [14] a introduit le fibré des différentielles de jets qui ne tiennent pas compte de la paramétrisation de la courbe. On définit le sous-fibré $E_{k,m}V^* \subset E_{k,m}^{GG} V^*$, appelé le fibré des différentielles de jets invariantes d'ordre k et de degré m, i.e :

$$Q((f \circ \phi)', (f \circ \phi)'', ..., (f \circ \phi)^{(k)}) = \phi'(0)^m Q(f', f'', ..., f^{(k)}),$$

pour tout $\phi \in G_k$ le groupe des germes de k-jets de biholomorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$. Pour G'_k le sous-groupe de G_k des germes ϕ tangents à l'identité $(\phi'(0) = 1)$ on a $E_{k,m}V^* = (E_{k,m}^{GG} V^*)^{G'_k}$.

La filtration canonique sur $E^{GG}_{k,m}V^*$ induit une filtration naturelle sur $E_{k,m}V^*$ dont les termes gradués sont

$$\left(\bigoplus_{l_1+2l_2+...+kl_k=m} S^{l_1}V^* \otimes S^{l_2}V^* \otimes ... \otimes S^{l_k}V^*\right)^{G'_k}.$$

Le lien entre ces espaces d'opérateurs différentiels et les espaces de jets construits précédemment est donné par :

Théorème 1.3.3 ([14]). *Supposons que V a un rang $r \geq 2$.*

Soit $\pi_{0,k} : P_kV \to X$, et J_kV^{reg} le fibré des k-jets réguliers i.e $f'(0) \neq 0$.

i) Le quotient J_kV^{reg}/G_k a la structure d'un fibré localement trivial au-dessus de X. On note P_kV^{reg} l'image du plongement holomorphe $J_kV^{reg}/G_k \to P_kV$.

ii) Le faisceau image direct $(\pi_{0,k})_*\mathcal{O}_{P_kV}(m) \simeq \mathcal{O}(E_{k,m}V^*)$ peut être identifié avec le faisceau des sections holomorphes de $E_{k,m}V^*$.

iii) Pour tout $m > 0$, le lieu de base du système linéaire $|\mathcal{O}_{P_kV}(m)|$ est égal à $P_kV^{sing} = P_kV \setminus P_kV^{reg}$. De plus, $\mathcal{O}_{P_kV}(1)$ est relativement gros au-dessus de X.

1.3.3 Métriques à courbure négative

Définition 1.3.4. *Une métrique singulière h_k de k-jets sur une variété complexe dirigée (X,V) est une métrique sur le fibré en droites $\mathcal{O}_{P_kV}(-1)$, telle que la fonction de poids ϕ est telle que $-\phi$ soit quasi-plurisousharmonique. On note $\Sigma_{h_k} \subset P_kV$ le lieu singulier de la métrique i.e l'ensemble des points où ϕ n'est pas localement bornée, et $\Theta_{h_k^{-1}}(\mathcal{O}_{P_kV}(1)) = -\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\phi$ le courant de courbure.*
On dit que h_k est à courbure négative au sens des jets s'il existe $\varepsilon > 0$ et une métrique hermitienne ω_k sur TP_kV tels que :

$$\Theta_{h_k^{-1}}(\mathcal{O}_{P_kV}(1))(\xi) \geq \varepsilon\, |\xi|^2_{\omega_k}, \text{ pour tout } \xi \in V_k$$

Comme application du lemme d'Ahlfors-Schwarz on a :

Théorème 1.3.5 ([14]). *Soit (X,V) une variété complexe compacte dirigée. Si (X,V) a une métrique de k-jet avec courbure négative, alors toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ tangente à V vérifie $f_{[k]}(\mathbb{C}) \subset \Sigma_{h_k}$. En particulier, si $\Sigma_{h_k} \subset P_kV^{sing}$, alors (X,V) est hyperbolique.*

En particulier, l'existence de suffisamment de différentielles de jets globales implique que l'on peut construire une métrique de k-jet avec courbure négative :

Corollaire 1.3.6 ([14]). *Supposons qu'il existe des entiers $k, m > 0$ et un fibré en droites ample L sur X tel que*

$$H^0(P_kV, \mathcal{O}_{P_kV}(m) \otimes \pi_{0,k}^* L^{-1}) \simeq H^0(X, E_{k,m}V^* \otimes L^{-1})$$

ait des sections non nulles $\sigma_1, ..., \sigma_N$. Soit $Z \subset P_kV$ le lieu de base de ces sections. Alors toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ tangente à V vérifie $f_{[k]}(\mathbb{C}) \subset Z$. Autrement dit, pour tout opérateur différentiel P, G_k-invariant à valeurs dans L^{-1}, toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ tangente à V vérifie l'équation différentielle $P(f) = 0$.

Définition 1.3.7 ([14]). *Soit A un fibré en droites ample sur une variété complexe compacte X. L'ensemble base des $k-$jets est défini par :*

$$B_k := \bigcap_{m>0} B_{k,m} \subset X_k$$

où $B_{k,m}$ est le lieu de base du fibré $\mathcal{O}_{X_k}(m) \otimes \pi_{0,k}^* \mathcal{O}(-A)$.

D'après le corollaire précédent toute courbe entière non constante $f : \mathbb{C} \to X$ vérifie $f_{[k]}(\mathbb{C}) \subset B_k$, donc $f(\mathbb{C}) \subset \bigcap_{k>0} \pi_{k,0}(B_k)$.

Ce qui précède fournit alors une approche naturelle pour attaquer la conjecture de Green et Griffiths [23] :

Conjecture 1.3.8. *Si X est une variété de type général, toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ est algébriquement dégénérée et il existe un sous ensemble algébrique propre $Y \subset X$ contenant toutes les images des courbes entières non constantes.*

1.4 La conjecture de Kobayashi en dimension 3

Le cas des surfaces a été traité par McQuillan [31] et Demailly-El Goul [16] qui ont démontré la conjecture de Kobayashi pour un degré $d \geq 21$. Récemment Paun [38] a pu baisser légèrement ce degré à 18.

Nous présentons ici l'approche développée à la suite de [39] dans [40], [41] et [42] vers la conjecture de Kobayashi en dimension 3.

1.4.1 Contrôle de la cohomologie par les inégalités de Morse

Une fois la caractérisation des différentielles de jets d'ordre 3 obtenue,

Théorème 1.4.1 ([39]). *Soit X une variété complexe de dimension 3, alors :*

$$Gr^{\bullet}E_{3,m}T_X^* = \bigoplus_{0\leq\gamma\leq\frac{m}{5}} \Big(\bigoplus_{\{\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=m-\gamma;\ \lambda_i-\lambda_j\geq\gamma,\ i<j\}} \Gamma^{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}T_X^* \Big),$$

où Γ est le foncteur de Schur.

on constate que pour montrer l'existence d'opérateurs différentiels globaux, on est ramené à un contrôle de la dimension des groupes de cohomologie des fibrés de jets. On se ramène au cas des fibrés en droites de la façon suivante.

Soit X une variété complexe lisse de dimension 3. Notons $Fl(T_X^*)$ la variété des drapeaux de T_X^* i.e des suites de sous-espaces vectoriels emboîtés

$$D = \{0 = E_3 \subset E_2 \subset E_1 \subset E_0 = T_{X,x}^*\}.$$

Soit $\pi : Fl(T_X^*) \to X$. C'est une fibration localement triviale dont la dimension relative est 3.

Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ une partition telle que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. Notons $\mathcal{L}^\lambda$ le fibré en droites sur $Fl(T_X^*)$ dont la fibre au-dessus du drapeau précédent est $\mathcal{L}_D^\lambda = \bigotimes_{i=1}^{3} \det(E_{i-1}/E_i)^{\otimes\lambda_i}$. D'après le théorème de Bott [4], si $m \geq 0$:

$$\begin{aligned} \pi_*(\mathcal{L}^\lambda)^{\otimes m} &= \Gamma^{m\lambda}T_X^*, \\ \mathcal{R}^q\pi_*(\mathcal{L}^\lambda)^{\otimes m} &= 0 \text{ si } q > 0. \end{aligned}$$

Les fibrés $\Gamma^{m\lambda}T_X^*$ et $(\mathcal{L}^\lambda)^{\otimes m}$ ont donc même cohomologie. On a donc ramené le problème à un contrôle de la cohomologie de fibrés en droites.

L'idée est alors d'utiliser les *inégalités de Morse* de Demailly [15]. Soit $L \to X$ un fibré en droites sur une variété compacte Kählérienne de dimension n et $E \to X$ un fibré vectoriel holomorphe de rang r. On suppose que l'on peut écrire L comme différence de deux fibrés nef $L = F \otimes G^{-1}$.

Théorème 1.4.2 (Demailly). *Avec les notations précédentes, on a*

- *Inégalités de Morse holomorphes faibles :*

$$h^q(X, L^{\otimes m} \otimes E) \leq r\frac{m^n}{(m-q)!q!}F^{n-q} \cdot G^q + o(m^n).$$

- *Inégalités de Morse holomorphes fortes :*

$$\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j}h^j(X, L^{\otimes m} \otimes E) \leq r\frac{m^n}{n!}\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j}\binom{n}{j}F^{n-j} \cdot G^j + o(m^n).$$

En particulier, $L^{\otimes m} \otimes E$ a une section globale pour m grand dès que $F^n - n\,F^{n-1} \cdot G > 0$.

La version algébrique de ces inégalités, démontrée également par Trapani, permet d'obtenir

Théorème 1.4.3 ([40]). *Soit X une hypersurface lisse de degré d de $\mathbb{P}^4$, alors*

$$h^2(X, Gr^\bullet E_{3,m}T_X^*) \leq Cd(d+13)m^9 + O(m^8),$$

où C est une constante.

et finalement

Théorème 1.4.4 ([40]). *Soit X une hypersurface lisse de degré $d \geq 97$ de $\mathbb{P}^4$ et A un fibré en droites ample, alors il y a des sections globales non nulles de $E_{3,m}T_X^* \otimes A^{-1}$ pour m suffisamment grand et toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ doit satisfaire l'équation différentielle correspondante.*

1.4.2 Champs de vecteurs sur les espaces de jets

On suit alors la stratégie développée par Siu dans [48] pour obtenir plus d'équations différentielles. L'idée est de généraliser la technique de Voisin (cf. Proposition 1.2.11) aux espaces de jets.

Soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^{N_d}$ l'hypersurface universelle de $\mathbb{P}^4$ de degré d et d'équation

$$\sum_{|\alpha|=d} a_\alpha Z^\alpha = 0, \text{ where } [a] \in \mathbb{P}^{N_d} \text{ and } [Z] \in \mathbb{P}^4.$$

Soit $J_3(\mathcal{X})$ la variété des 3-jets de $\mathcal{X}$. On considère alors la sous-variété des jets verticaux $J_3^v(\mathcal{X}) \subset J_3(\mathcal{X})$ i.e des jets tangents aux fibres de la projection $\pi_3 : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^{N_d}$.

La première étape est de montrer un résultat d'engendrement global pour les champs de vecteurs méromorphes avec des pôles d'ordre borné sur l'espace des 3-jets verticaux :

Proposition 1.4.5 ([40]). *Soit*

$$\Sigma_0 := \{(z, a, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}) \in J_3^v(\mathcal{X}) / \xi^{(1)} \wedge \xi^{(2)} \wedge \xi^{(3)} = 0\}.$$

Alors le fibré vectoriel $T_{J_3^v(\mathcal{X})} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(12) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_d}}(*)$ est engendré par ses sections globales sur $J_3^v(\mathcal{X}) \backslash \Sigma$, où Σ est l'adhérence de Σ_0.

1.4.3 Dégénérescence des courbes entières

Pour obtenir, l'hyperbolicité faible des hypersurfaces génériques de $\mathbb{P}^4$, il reste à utiliser ce résultat pour construire suffisamment d'équations différentielles vérifiées par une courbe entière non-constante dans une telle hypersurface. L'idée est que l'on peut considérer un opérateur différentiel de Green-Griffiths comme une fonction holomorphe sur l'espace des jets. Pour obtenir un nouvel opérateur différentiel il nous suffit alors de différentier cette fonction holomorphe par les champs de vecteurs que nous venons de construire.

Soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^{N_d}$ l'hypersurface universelle de $\mathbb{P}^3$ de degré d. On a vu que pour un degré $d \geq 97$, on pouvait construire des opérateurs différentiels invariants globaux i.e des sections globales de $E_{3,m}T^*_{\mathcal{X}_a} \otimes K^{-t}_{\mathcal{X}_a}$. Par semi-continuité, on obtient l'existence d'un ouvert de Zariski $U_d \subset \mathbb{P}^{N_d}$, tel que pour tout $a \in U_d$, il existe un diviseur irréductible et réduit $\mathcal{Y}_a = (P_a = 0) \subset (\mathcal{X}_a)_3$ où

$$P_a \in H^0((\mathcal{X}_a)_3, \mathcal{O}_{(\mathcal{X}_a)_3}(m) \otimes K^{-t}_{\mathcal{X}_a}),$$

tel que la famille des sections (P_a) varie de manière holomorphe avec a. On peut alors voir la famille de sections (P_a) comme une fonction holomorphe $\mathcal{P} : J_3^v(\mathcal{X})_{U_d} \to \mathbb{C}$ qui est polynômiale de degré m sur chaque fibre de $\pi : J_3^v(\mathcal{X}) \to \mathcal{X}$. En prenant la différentielle de cette fonction avec un des champs de vecteurs construits plus haut on obtient une section de

$$\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_a)_3}(m) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(12 - t(d-5)).$$

Ainsi, par la propriété d'engendrement global précédente, on peut construire, en dehors de Σ et du lieu au-dessus des points où tous les coefficients de $\mathcal{P}$, vue comme fonction de $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}$, sont nuls, un opérateur différentiel non-nul. Pour conclure à la dégénérescence algébrique de toute courbe entière il reste à contrôler l'ordre des pôles pour garantir que le nouvel opérateur différentiel s'annule bien sur un diviseur ample.

Cela est garanti par le lemme suivant :

Lemme 1.4.6 ([40]). *Soit X une hypersurface lisse de $\mathbb{P}^4$ de degré d, $0 < \delta < \frac{1}{18}$ alors $h^0(X, E_{3,m}T^*_X \otimes K_X^{-\delta m}) \geq \alpha(d,\delta)m^9 + O(m^8)$, où $\alpha(d,\delta)$ est une fonction polynômiale explicite.*

Puisqu'on différentie moins de m fois, la condition $\delta(d-5) > 12$ est suffisante pour conclure

Théorème 1.4.7 ([40]). *Soit $X \subset \mathbb{P}^4$ une hypersurface générique de degré $d \geq 593$. Alors toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ est algébriquement dégénérée, i.e. il existe une sous-variété $Y \subsetneq X$ telle que $f(\mathbb{C}) \subset Y$.*

Remarque 1.4.8. *Récemment Diverio et Trapani ont raffiné la méthode décrite ci-dessus en montrant que Y est de codimension ≥ 2 et donc par l'hyperbolicité algébrique de X, on obtient l'hyperbolicité de X [20].*

1.5 Le cas des hypersurfaces de grands degrés de $\mathbb{P}^n$

Dans un travail en commun avec Diverio et Merker, nous avons pu généraliser les techniques et résultats précédents obtenus en dimension 3 en dimension supérieure. Nous obtenons en effet le résultat effectif suivant

Théorème 1.5.1 ([19])**.** *Soit $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ une hypersurface lisse générique de degré d. Si*

$$d \geq 2^{n^5},$$

alors il existe une sous-variété propre $Y \subsetneq X$ telle que toute courbe entière non-constante $f : \mathbb{C} \to X$ vérifie $f(\mathbb{C}) \subset Y$.

Pour obtenir l'existence de différentielles de jets globales en toutes dimensions avec une borne effective sur le degré, l'idée est d'utiliser à nouveau les inégalités de Morse comme dans le cas de la dimension 3. La différence est que l'on applique ces inégalités de Morse directement aux fibrés tautologiques sur les espaces de jets. En effet, Diverio [18] a montré qu'en considérant, à la suite de Demailly, les fibrés

Définition 1.5.2. *Soit $\pi_{j,k} : X_k \to X_j$ la projection naturelle du k-ième au j-ième étage dans la tour de Demailly. Pour $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{Z}^k$, on définit un fibré en droites $\mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a})$ sur X_k par*

$$\mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a}) := \pi_{1,k}^*\mathcal{O}_{X_1}(a_1) \otimes \pi_{2,k}^*\mathcal{O}_{X_2}(a_2) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}_{X_k}(a_k).$$

et en utilisant la proposition

Proposition 1.5.3 (Demailly [14])**.** *Soit $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ et $m = a_1 + \cdots + a_k$.*

1. *On a une injection de faisceaux $(\pi_{0,k})_*\mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a}) \hookrightarrow \mathcal{O}(E_{k,m})$.*
2. *Si*

$$a_1 \geq 3a_2, \ldots, a_{k-2} \geq 3a_{k-1} \text{ et } a_{k-1} \geq 2a_k > 0, \tag{1.1}$$

alors le fibré en droites $\mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a})$ est relativement nef au-dessus de X.

on obtient comme application des inégalités de Morse, que pour montrer l'existence de différentielles de jets invariantes globales, il suffit de montrer l'existence d'un n-uplet $(a_1, \dots, a_n)$ satisfaisant la condition (1.1) tel que

$$(\mathcal{O}_{X_n}(\mathbf{a}) \otimes \pi_{0,n}^*\mathcal{O}_X(2|\mathbf{a}|))^{n^2} - n^2(\mathcal{O}_{X_n}(\mathbf{a}) \otimes \pi_{0,n}^*\mathcal{O}_X(2|\mathbf{a}|))^{n^2-1}.\pi_{0,n}^*\mathcal{O}_X(2|\mathbf{a}|) > 0,$$

où $n^2 = \dim X_n$.

Il s'agit alors d'utiliser la nature inductive de la construction de la tour de Demailly pour contrôler cette quantité.

On fixe un niveau $1 \leq l \leq n$ dans la tour de Demailly. On dispose des suites exactes

$$0 \to T_{X_l/X_{l-1}} \to V_l \to \mathcal{O}_{X_l}(-1) \to 0,$$

$$0 \to \mathcal{O}_{X_l} \to \pi_{l-1,l}^* V_{l-1} \otimes \mathcal{O}_{X_l}(1) \to T_{X_l/X_{l-1}} \to 0.$$

On en déduit la relation entre les classes de Chern totales

$$c_\bullet(V_l) = c_\bullet(T_{X_l/X_{l-1}}).c_\bullet(\mathcal{O}_{X_l}(-1)),$$

et par substitution

$$c_\bullet(V_l) = c_\bullet(\mathcal{O}_{X_l}(-1)).c_\bullet(\pi_{l-1,l}^* V_{l-1} \otimes \mathcal{O}_{X_l}(1)).$$

Par identification on obtient la première famille de relations **(rel1)**, $1 \leq j \leq n$:

$$C_j^l = \sum_{k=0}^{j} \lambda_{j,j-k} C_k^{l-1}(u_l)^{j-k},$$

où $C_j^l = c_j(V_l)$ est la j-ième classe de Chern de V_l, $u_l = c_1(\mathcal{O}_{X_l}(1))$ et

$$\lambda_{j,j-k} := \frac{(n-k)!}{(j-k)!(n-j)!} - \frac{(n-k)!}{(j-k-1)!(n-j+1)!}.$$

Comme $X_l = \mathbb{P}(V_{l-1})$ on a la seconde famille de relations **(rel2)**, $1 \leq l \leq n$:

$$(u_l)^n = -C_1^{l-1}(u_l)^{n-1} - C_2^{l-1}(u_l)^{n-2} - \cdots - C_{n-1}^{l-1}u_l - C_n^{l-1}.$$

Ces relations fournissent

Lemme 1.5.4 ([19])**.** *Soit $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ une hypersurface lisse de degré d. Après un calcul d'éliminations utilisant les relations (rel1) et (rel2), tout polynôme à coefficients entiers*

$$P(h, (C_j^l)_{1\leq j\leq n}^{0\leq l\leq n}, (u_{l'})_{0\leq l'\leq n}),$$

avec pour arguments les classes de Chern présentes dans la tour de Demailly et homogène d'ordre $n^2 = \dim X_n$*, s'identifie à un polynôme homogène en les classes de Chern de la base* X *et* $h := c_1(\mathcal{O}_X(1))$*. De plus, après une dernière substitution, le polynôme devient un simple polynôme* $P_{red}(d) \in \mathbb{Z}[d]$ *de degré* $\leq n+1$*.*

Pour obtenir des bornes effectives pour l'existence de sections globales il suffit d'appliquer le processus d'élimination à

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{O}_{X_n}(\mathbf{a}) \otimes \pi_{0,n}^*\mathcal{O}_X(2|\mathbf{a}|))^{n^2} \\
&-n^2(\mathcal{O}_{X_n}(\mathbf{a}) \otimes \pi_{0,n}^*\mathcal{O}_X(2|\mathbf{a}|))^{n^2-1}.\pi_{0,n}^*\mathcal{O}_X(2|\mathbf{a}|) = \\
&(a_1u_1 + \cdots + a_nu_n + 2|a|h)^{n^2} \\
&-n^2(a_1u_1 + \cdots + a_nu_n + 2|a|h)^{n^2-1}.2|a|h = \\
&P_{a_1,\ldots,a_n}(d) = \sum_{0\leq k\leq n+1} p_{k;a_1,\ldots,a_n}.d^k,
\end{aligned}$$

et de déterminer quand ce dernier polynôme est positif.

En petites dimensions, on peut faire un calcul explicite mais rapidement la complexité explose et un calcul exact n'est plus accessible même sur machine. Cependant un contrôle des coefficients est possible. Il fournit alors

Théorème 1.5.5 ([19])**.** *Si* $d \geq 2^{n^5}$ *alors il existe des opérateurs différentiels algébriques invariants globaux non nuls sur les hypersurfaces lisses de degré* d *dans* $\mathbb{P}^{n+1}$*.*

Pour obtenir la dégénérescence algébrique des courbes entières, il suffit alors d'appliquer la même stratégie qu'en dimension 3. Nous utilisons l'existence des champs de vecteurs sur l'espace des jets verticaux dont la généralisation en dimension quelconque a été obtenue par Merker [34].

Problème 1.5.6. *Une question sans aucun doute abordable est d'étendre ces résultats au cas logarithmique i.e. celui des complémentaires d'hypersurfaces.*

1.6 Quelques généralisations

1.6.1 De meilleures bornes en petites dimensions

En petites dimensions, il est possible d'obtenir de meilleures bornes

Théorème 1.6.1 ([19])**.** *Soit* $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ *une hypersurface lisse générique de degré* d*. Alors il existe une sous-variété propre* $Y \subsetneq X$ *telle que toute courbe entière non-constante* $f : \mathbb{C} \to X$ *vérifie* $f(\mathbb{C}) \subset Y$

1. *pour* $n = 3$, *dès que* $d \geq 593$;
2. *pour* $n = 4$, *dès que* $d \geq 3203$;
3. *pour* $n = 5$, *dès que* $d \geq 35355$;
4. *pour* $n = 6$, *dès que* $d \geq 172925$.

La borne de la dimension 4 est obtenue par une étude algébrique des jets de Demailly sur le modèle de ce qui avait été fait en dimension 3 dans [39], alors qu'en dimensions 5 et 6, les bornes proviennent d'un calcul explicite de la quantité décrite ci-dessus, provenant des inégalités de Morse.

1.6.2 Le cas logarithmique en dimension 3

J'ai donné la version logarithmique du résultat obtenu en dimension 3 dans le cas compact

Théorème 1.6.2 ([42]). *Soit* $X \subset \mathbb{P}^3$ *une hypersurface générique de degré* $d \geq 586$. *Alors toute courbe entière* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^3 \setminus X$ *est algébriquement dégénérée, i.e. il existe une sous-variété* $Y \subsetneq \mathbb{P}^3$ *telle que* $f(\mathbb{C}) \subset Y$.

La preuve se fonde sur une généralisation des techniques utilisées dans le cas compact au contexte logarithmique. Les résultats obtenus sur les espaces de jets logarithmiques permettent d'étendre à la situation considérée la stratégie décrite précédemment dans le cas compact.

1.6.3 Complémentaires de courbes dans $\mathbb{P}^2$

J'ai appliqué les techniques développées précédemment à l'hyperbolicité des complémentaires de courbes dans $\mathbb{P}^2$. En utilisant les champs de vecteurs sur l'espace des jets logarithmiques, j'ai obtenu

Théorème 1.6.3 ([43]). *Soit* $C = C_1 \cup C_2$ *une courbe très générique de* $\mathbb{P}^2$ *à deux composantes irréductibles* C_1 *et* C_2 *de degrés* $d_1 \leq d_2$. *Alors* $\mathbb{P}^2 \setminus C$ *est hyperbolique et hyperboliquement plongé dans* $\mathbb{P}^2$ *si les degrés satisfont*

$$\begin{array}{llll} \textit{soit} & d_1 \geq 4, & & \\ \textit{ou} & d_1 = 3 & \textit{et} & d_2 \geq 5, \\ \textit{ou} & d_1 = 2 & \textit{et} & d_2 \geq 8, \\ \textit{ou} & d_1 = 1 & \textit{et} & d_2 \geq 11. \end{array}$$

Ces techniques permettent également d'améliorer le cas à une composante irréductible traité par El Goul et d'obtenir l'hyperbolicité du complémentaire d'une courbe très générique de degré supérieur ou égal à 14.

1.6.4 Le cas de plusieurs variables

Dans un travail commun [37] avec G. Pacienza, nous étendons les techniques de jets précédentes au cas des applications holomorphes $f : \mathbb{C}^p \to X$. L'une des motivations de ce travail est l'étude de la p-mesure hyperbolicité de Kobayashi-Eisenman. Eisenman a généralisé la construction de la pseudo-métrique de Kobayashi en introduisant pour toute variété complexe de dimension n une pseudo-métrique p-dimensionnelle pour tout $1 \leq p \leq n$. Alors que de nombreux travaux ont été consacrés au cas $p = 1$ de la pseudo-métrique de Kobayashi, il semble que l'on connaisse beaucoup moins de choses sur les pseudo-métriques de Eisenman.

Tout d'abord, nous généralisons certaines techniques pour traiter les cas intermédiaires $2 \leq p \leq n - 1$, qui devraient être en principe plus accessibles. Ensuite nous appliquons ces constructions pour étendre dans cette situation les résultats obtenus pour les courbes entières.

Plus précisément, dans la première partie de cet article, nous étendons à cette situation plus générale les techniques de différentielles de jets. Ainsi, nous construisons les fibrés de jets X_k^p comme tour de Grassmanniennes au-dessus de X et les fibrés de différentielles de jets $E_{p,k,m}$ des opérateurs différentiels algébriques d'ordre k et degré m agissant sur les germes d'applications holomorphes de $\mathbb{C}^p$ dans X. Il est intéressant de noter que des différences significatives apparaissent par rapport au cas $p = 1$ des courbes entières. Ainsi, un nouvel objet doit être considéré : il s'agit du *lieu effectif* $Z_k^p \subset X_k^p$, qui peut être vu comme l'adhérence de l'ensemble des points correspondant aux relevés des points de X par les applications holomorphes. Il convient donc de remarquer qu'une nouvelle difficulté apparaît en raison des conditions d'intégrabilité des sous-fibrés, inexistantes pour le cas $p = 1$.

Comme application, nous obtenons

Théorème 1.6.4. *Soit $X_d \subset \mathbb{P}^4$ une hypersurface très générale de degré $d \geq 93$. Alors, il n'existe pas d'application holomorphe non-dégénérée de $\mathbb{C}^2$ vers X_d.*

Problème 1.6.5. *Passer à l'étude des applications $f : \Delta^{p-1} \times \mathbb{C} \to X$ où Δ est le disque unité. Cela semble plus délicat mais c'est indispensable pour la p-mesure hyperbolicité.*

Chapitre 2

Structures orbifoldes et hyperbolicité

2.1 Structures orbifoldes

L'observation que les structures orbifoldes peuvent jouer un rôle dans les résultats de dégénérescence des courbes entières est assez ancienne, comme le montre

Théorème 2.1.1 (Nevanlinna). *Soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{P}^1$ et $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N} \cup \infty$. Si*

$$\sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) > 2,$$

alors toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1$ qui est ramifiée au-dessus de a_i avec une multiplicité au moins m_i est constante.

Pour donner une interprétation géométrique suivant la philosophie de Green-Griffiths, il convient de considérer le fibré canonique "orbifolde"

$$K_{\mathbb{P}^1} + \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) a_i > 0.$$

La condition numérique précédente du théorème de Nevanlinna peut alors s'interpréter par le fait que $(\mathbb{P}^1/\Delta)$ est de type général où

$$\Delta = \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) a_i.$$

Plus généralement en suivant Campana [7] on introduit

Définition 2.1.2 (Campana)**.** *Une orbifolde (géométrique)* (X/Δ) *est une paire où* X *est une variété complexe normale et* Δ *un* $\mathbb{Q}$*-diviseur dont la décomposition en composantes irréductibles s'écrit* $\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{m_i}\right)Z_i$*,* $m_i \in \mathbb{N}\cup\infty$.

Définition 2.1.3. (X/Δ) *est lisse si* X *est lisse et* $\lceil\Delta\rceil$*, le support de* Δ*, est à croisements normaux.*

Définition 2.1.4. $f:\mathbb{C}\to(X/\Delta)$ *est une courbe entière orbifolde si elle ramifie au-dessus de* Z_i *avec une multiplicité au moins égale à* m_i*.*

Il est alors naturel de généraliser la conjecture de Green-Griffiths en

Conjecture 2.1.5. *Soit* (X/Δ) *une orbifolde projective lisse de type général, i.e* $K_X+\Delta$ *est gros. Alors il existe une sous-variété propre qui contient toute courbe entière orbifolde* $f:\mathbb{C}\to(X/\Delta)$ *non-constante.*

Notre approche consiste à travailler avec les différentes notions d'*orbifoldes* qui sont apparues dans la littérature : les V-variétés de Satake, les orbifoldes de Thurston, les champs algébriques de Grothendieck, Deligne et Mumford, et les orbifoldes géométriques de Campana.

2.2 Le cas lisse

Nous généralisons l'approche initiée dans [8], en étendant au contexte orbifolde la stratégie de Bogomolov [1] utilisant les formes différentielles symétriques pour obtenir les propriétés d'hyperbolicité des surfaces qui satisfont $c_1^2-c_2>0$. Ainsi, en direction de la conjecture précédente, nous avons obtenu

Théorème 2.2.1 ([45])**.** *Soit* (X/Δ) *une surface orbifolde projective lisse de type général,* $\Delta=\sum_i(1-\frac{1}{m_i})C_i$*. On note* $g_i:=g(C_i)$ *le genre de la courbe* C_i *et* $\bar{c}_1,\bar{c}_2$ *les classes de Chern logarithmiques de* $(X,\lceil\Delta\rceil)$*. Si*

$$\bar{c}_1^2-\bar{c}_2-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}(2g_i-2+\sum_{j\neq i}C_iC_j)+\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\frac{C_iC_j}{m_im_j}>0, \tag{2.1}$$

alors il existe une sous-variété propre $Y\subsetneq X$ *tel que toute courbe entière orbifolde* $f:\mathbb{C}\to X$ *vérifie* $f(\mathbb{C})\subset Y$*.*

Ce résultat est obtenu en utilisant les objets géométriques dans le cadre orbifolde, en particulier les faisceaux de formes différentielles symétriques orbifoldes

Définition 2.2.2 (Campana). *Soient $(x_1,\ldots,x_n)$ des coordonnées locales telles que Δ a pour équation*

$$x_1^{(1-\frac{1}{m_1})}\ldots x_n^{(1-\frac{1}{m_n})}=0.$$

Pour N entier positif, $S^N\Omega_{(X/\Delta)}$ est le sous-faisceau localement libre de $S^N\Omega_X(log\lceil\Delta\rceil)$ engendré par les éléments

$$x_1^{\lceil\frac{\alpha_1}{m_1}\rceil}\ldots x_n^{\lceil\frac{\alpha_n}{m_n}\rceil}\left(\frac{dx_1}{x_1}\right)^{\alpha_1}\ldots\left(\frac{dx_n}{x_n}\right)^{\alpha_n},$$

tels que $\sum\alpha_i=N$, où $\lceil k\rceil$ représente l'arrondi supérieur de k.

L'observation, facile mais néanmoins importante, que l'on peut faire ici est qu'à (X/Δ) lisse on peut associer une V-variété ou orbifolde au sens usuel, notée $\pi:\mathcal{X}\to X$. En effet, on a des cartes locales données par $D\to D/\prod_{j=1}^n\mathbb{Z}/m_j\mathbb{Z}$ où $\prod_{j=1}^n\mathbb{Z}/m_j\mathbb{Z}$ agit sur le polydisque D par

$$(\zeta_1,\ldots,\zeta_n).(y_1,\ldots,y_n)=(\zeta_1y_1,\ldots,\zeta_ny_n),$$

où l'on identifie $\mathbb{Z}/m_j\mathbb{Z}$ et le groupe des m_j-ième racines de l'unité.

Alors le faisceau précédent des formes symétriques s'interprète naturellement comme

$$\pi_*S^N\Omega_{\mathcal{X}}=S^N\Omega_{(X/\Delta)}.$$

Considérons le cas des surfaces orbifoldes. On utilise, dans le cas des surfaces, la formule de Riemann-Roch orbifolde de T. Kawasaki [25] généralisée par B. Toën [49] :

$$\chi(\mathcal{X},S^N\Omega_{\mathcal{X}})=\frac{N^3}{6}(c_1^2-c_2)+O(N^2),$$

où c_1 et c_2 sont les classes de Chern orbifoldes de $\mathcal{X}$.

On obtient alors

Proposition 2.2.3 ([45]).

$$c_1^2=\overline{c}_1^2-2\sum_{i=1}^n\frac{1}{m_i}(2g_i-2)+\sum_{i=1}^n\frac{C_i^2}{m_i^2}+2\sum_{1\le i<j\le n}\frac{C_iC_j}{m_im_j}-2\sum_{j=1}^n\sum_{i=1,i\neq j}^n\frac{C_iC_j}{m_j},$$

$$c_2=\overline{c}_2-\sum_{i=1}^n\frac{1}{m_i}(2g_i-2)-\sum_{j=1}^n\sum_{i=1,i\neq j}^n\frac{C_iC_j}{m_j}+\sum_{1\le i<j\le n}\frac{C_iC_j}{m_im_j}.$$

Corollaire 2.2.4 ([45]). *Soit (X/Δ) une surface orbifolde projective lisse de type général, $\Delta = \sum_i (1 - \frac{1}{m_i})C_i$. On note $g_i := g(C_i)$, $\overline{c}_1, \overline{c}_2$ les classes de Chern logarithmiques de $(X, \lceil \Delta \rceil)$ et A un fibré en droites ample sur X. Si*

$$\overline{c}_1^2 - \overline{c}_2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i}(2g_i - 2 + \sum_{j \neq i} C_i C_j) + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{C_i C_j}{m_i m_j} > 0,$$

alors $H^0(X, S^N \Omega_{(X/\Delta)} \otimes A^{-1}) \neq 0$ pour N suffisamment grand.

Ce corollaire associé aux résultats de McQuillan sur les surfaces fournit le théorème annoncé.

2.3 Le cas singulier

L'avantage de ce point de vue est que la méthode précédente s'applique à toute paire (X/Δ) à laquelle on peut associer une orbifolde $\mathcal{X}$ (au sens usuel). Ainsi elle s'applique aux surfaces orbifoldes (X/Δ) klt (Kawamata log terminales), dans la terminologie du programme de Mori.

Un exemple d'application est

Théorème 2.3.1 ([45]). *Soit $C \subset \mathbb{P}^2$ une courbe de degré d avec n noeuds et c cusps. Si*

$$-d^2 - 15d + \frac{75}{2} + \frac{1079}{96}c + 6n > 0,$$

alors il existe une courbe $D \subset \mathbb{P}^2$ contenant toute courbe entière non-constante $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^2 \setminus C$.

Ce résultat donne une nouvelle interprétation de résultats de Green [11], Grauert [22] qui ont obtenu des résultats également sur l'hyperbolicité de complémentaires de courbes singulières.

Cette méthode donne également une nouvelle preuve de

Théorème 2.3.2 (Bogomolov-De Oliveira [2]). *Soit $X \subset \mathbb{P}^3$ une surface nodale de degré d avec l noeuds. Si*

$$l > \frac{8}{3}\left(d^2 - \frac{5}{2}d\right),$$

alors il existe une sous-variété propre $Y \subset X$ qui contient toute courbe entière orbifolde non-constante $f : \mathbb{C} \to X$.

Ce résultat donne des exemples de surfaces de degré $d \geq 6$ quasi-hyperboliques, mais pas de degré 5 où le nombre de noeuds maximum est 31. En généralisant les techniques de jets au contexte orbifolde, on obtient que, sur une quintique à 31 noeuds, on peut construire des équations différentielles algébriques globales d'ordre 3.

Problème 2.3.3. *En utilisant ces méthodes, obtenir un exemple explicite de surface hyperbolique de degré* 5*.*

2.4 Variétés spéciales

Les résultats précédents sont particulièrement intéressants si on les insère dans le cadre introduit par Campana dans [7] que nous rappelons brièvement.

Définition 2.4.1. *Soit $f : X \to Y$ une fibration entre variétés complexes compactes lisses. Pour tout diviseur irréductible $D \subset Y$:*

$$f^*(D) = \sum_j m_j D_j + R,$$

où R est la partie f-exceptionnelle. Alors la multiplicité de D est définie par

$$m(f, D) = \inf_j \{m_j\}.$$

Définition 2.4.2. *La base orbifolde $(Y/\Delta(f))$ est alors définie par*

$$\Delta(f) = \sum_{D \subset Y} \left(1 - \frac{1}{m(f, D)}\right) D.$$

Définition 2.4.3. *Soit $f : X \dashrightarrow Y$ une fibration. Alors sa dimension de Kodaira est*

$$\kappa(f) = \inf_{f' \sim f} \{\kappa(Y'/\Delta(f'))\},$$

où $f' \sim f$ si et seulement si il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, dashed, "w"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, dashed, "f"] \\ Y' \arrow[r, dashed, "v"'] & Y \end{tikzcd}$$

avec w et v biméromorphes.

Définition 2.4.4. *1. Une fibration $f : X \dashrightarrow Y$ est de type général si $\kappa(f) = \dim Y > 0$.*

2. *X est spéciale si elle n'admet pas de fibration $f : X \dashrightarrow Y$ de type général.*
3. *$f : X \dashrightarrow Y$ est spéciale si sa fibre générale est spéciale.*

Théorème 2.4.5 (Campana [7]). *Soit X une variété projective lisse. Alors il existe une unique (à équivalence près) fibration*

$$c_X : X \dashrightarrow \mathcal{C}(X),$$

appelée le coeur de X telle que

1. *c_X est spéciale.*
2. *c_X est de type général ou constante (si et seulement si X est spéciale).*

Ainsi on peut décomposer X en une "partie hyperbolique", la base orbifolde du coeur, et une partie "non-hyperbolique". En effet, les variétés spéciales devraient être caractérisées par la conjecture :

Conjecture 2.4.6 (Campana [7]). *X est spéciale si et seulement si $d_X \equiv 0$, où d_X représente la pseudo-distance de Kobayashi.*

Remarque 2.4.7. *Cette conjecture est connue uniquement pour les courbes, les surfaces projectives qui ne sont pas de type général et les variétés rationnellement connexes.*

Comme conséquence, on obtient la description suivante :

Conjecture 2.4.8 (Campana [7]). *$d_X = c_X^* \delta_X$ où δ_X est une pseudo-distance sur $\mathcal{C}(X)$.*

2.5 Hyperbolicité des orbifoldes géométriques

En suivant [9], on définit les morphismes orbifoldes du disque unité vers une orbifolde.

Définition 2.5.1 ([9]). *Soit (X, Δ) une orbifolde avec $\Delta = \sum_i (1 - \frac{1}{m_i}) Z_i$, $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$ le disque unité et h une application holomorphe de D vers X.*

1. *h est un morphisme orbifolde (non-classique) de D vers (X, Δ) si $h(D) \nsubseteq supp(\Delta)$ et $mult_x(h^* Z_i) \geqslant m_i$ pour tout i et $x \in D$ avec $h(x) \in supp(Z_i)$. Si $m_i = \infty$ on demande $h(D) \cap Z_i = \emptyset$.*
2. *h est un morphisme orbifolde classique de D vers (X, Δ) si $h(D) \nsubseteq supp(\Delta)$ et $mult_x(h^* Z_i)$ est un multiple de m_i pour tout i et $x \in D$ avec $h(x) \in supp(Z_i)$. Si $m_i = \infty$ on demande $h(D) \cap Z_i = \emptyset$.*

Il est alors possible de définir la version orbifolde de la pseudo-distance de Kobayashi.

Soit (X, Δ) une orbifolde avec $\Delta = \sum_i a_i Z_i$ et Δ_1 l'union de tous les Z_i tels que $a_i = 1$.

Définition 2.5.2. *1. La pseudo-distance de Kobayashi orbifolde $d_{(X,\Delta)}$ sur (X, Δ) est la plus grande pseudo-distance sur $X \setminus \Delta_1$ telle que*

$$g^* d_{(X,\Delta)} \leqslant d_P,$$

pour tout morphisme orbifolde $g : D \to (X, \Delta)$, où d_P est la distance de Poincaré sur D.

2. La pseudo-distance de Kobayashi orbifolde classique $d^*_{(X,\Delta)}$ sur (X, Δ) est la plus grande pseudo-distance sur $X \setminus \Delta_1$ telle que

$$g^* d^*_{(X,\Delta)} \leqslant d_P,$$

pour tout morphisme orbifolde classique $g : D \to (X, \Delta)$, où d_P est la distance de Poincaré sur D.

Définition 2.5.3. *Une orbifolde (X, Δ) est hyperbolique (resp. classiquement hyperbolique) si $d_{(X,\Delta)}$ (resp. $d^*_{(X,\Delta)}$) est une distance sur $X \setminus \Delta_1$.*

On peut alors raffiner la conjecture 2.4.8

Conjecture 2.5.4 (Campana [7]). *$d_X = c^*_X \delta_X$ avec $\delta_X = d_{(\mathcal{C}(X)/\Delta(c_X))}$.*

Dans le cas des courbes on démontre

Théorème 2.5.5 ([44]). *Soit (X, Δ) une courbe orbifolde classiquement hyperbolique. Alors les pseudo-distances de Kobayashi classique et non-classique coïncident et donc (X, Δ) est hyperbolique.*

En particulier on retrouve le résultat principal de [9].

En dimension supérieure, il est intéressant de noter que les deux notions d'hyperbolicité ne coïncident plus. En effet, avec Campana nous avons trouvé le contre-exemple suivant.

Exemple 2.5.6 ([44]). *Soit X une surface projective hyperbolique et S son éclatement en un point p et E le diviseur exceptionnel. On considère alors C_1, C_2, C_3 trois courbes tangentes à E en 3 points distincts p_1, p_2 et p_3. Soit*

$$\Delta = (1 - \frac{1}{3})C_1 + (1 - \frac{1}{3})C_2 + (1 - \frac{1}{5})C_3.$$

Alors (S/Δ) est classiquement hyperbolique mais non-hyperbolique.

2.6 Variétés faiblement spéciales

Montrons maintenant quelques applications des résultats de dégénérescence décrits précédemment. A la suite de Campana et Paun [8], on considère les variétés faiblement spéciales :

Définition 2.6.1. *Une variété projective X est faiblement spéciale si aucun de ses revêtements étales finis n'admet une application dominante sur une variété de type général.*

Bogomolov et Tschinkel [3] ont construit des variétés projectives de dimension 3 faiblement spéciales mais non spéciales car elles viennent avec une fibration $\varphi : X \to B$ de type général en raison des fibres multiples que l'on a au-dessus d'une courbe lisse D telle que $\kappa(B, K_B + (1 - \frac{1}{m})D) = 2$. Comme conséquence du théorème 2.2.1, on obtient une généralisation de [8]

Théorème 2.6.2 ([44])**.** *Soit X un exemple de Bogomolov-Tshinkel. Si*

$$\overline{c_1}^2(B, D) - \overline{c_2}(B, D) - \frac{1}{m}(2g(D) - 2) > 0,$$

alors il existe $\Gamma \subsetneq B$ tel que pour toute courbe entière $h : \mathbb{C} \to X$, $\phi \circ h : \mathbb{C} \to B$ est soit un point soit contenue dans Γ.

Ce résultat est intéressant car du côté arithmétique, il était conjecturé que les variétés faiblement spéciales définies sur un corps de nombres étaient potentiellement denses. Les conjectures de Lang-Vojta peuvent donc laisser penser que le résultat de dégénérescence précédent sur les courbes entières contredit cette conjecture.

Chapitre 3

Courants d'Ahlfors, feuilletages et hyperbolicité

L'un des premiers résultats marquants illustrant la philosophie de Green-Griffiths sur les conséquences des propriétés de positivité du fibré canonique d'une variété projective est

Théorème 3.0.3 (Bogomolov [1])**.** *Il n'y a qu'un nombre fini de courbes rationnelles et elliptiques sur une surface de type général vérifiant* $c_1^2 - c_2 > 0$.

L'hypothèse $c_1^2 - c_2 > 0$ assure que le fibré cotangent est gros et donc, par application du corollaire 1.3.6, les courbes rationnelles et elliptiques sont feuilles d'un feuilletage. On peut alors conclure par des résultats de finitude sur les feuilles algébriques de feuilletages.

Ce résultat a été étendu aux feuilles transcendantes par McQuillan [30]

Théorème 3.0.4. *Sur une surface de type général vérifiant* $c_1^2 - c_2 > 0$*, il n'y a pas de courbe entière* $f : \mathbb{C} \to X$ *Zariski-dense.*

Il est d'un grand intérêt d'étendre ces résultats en dimension supérieure. Le cas algébrique a été étudié par Lu et Miyaoka dans [28]

Théorème 3.0.5. *Soit* X *une variété projective lisse. Si* X *est de type général, alors* X *n'a qu'un nombre fini de sous-variétés lisses de codimension* 1 *ayant un diviseur anti-canonique pseudo-effectif. En particulier,* X *n'a qu'un nombre fini de sous-variétés lisses de codimension* 1 *qui sont de Fano, abéliennes et Calabi-Yau.*

Ce résultat peut être vu comme une généralisation du théorème de Bogomolov que l'on vient de mentionner. Dans cette partie, nous présentons le projet de recherche entamé dans [21] où nous nous intéressons à des généralisations du résultat de McQuillan. On considère donc des applications holomorphes $f : \mathbb{C}^p \to X$ dans une variété projective X de dimension n tangentes à un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}$ sur X.

3.1 Applications holomorphes et courants positifs fermés

On considère une application holomorphe $f : \mathbb{C}^m \to X$ de rang maximal où X est une variété projective. Alors on peut associer à f un courant positif fermé de bidimension $(1,1)$ généralisant le courant introduit par McQuillan dans le cas des courbes entières [30].

On choisit une forme Kählérienne ω sur X. Sur $\mathbb{C}^m$ on considère

$$\omega_0 := dd^c \ln |z|^2,$$

et

$$\sigma = d^c \ln |z|^2 \wedge \omega_0^{m-1},$$

la forme de Poincaré.

Soit $\eta \in A^{1,1}(X)$ et $r > 0$ alors on définit

$$T_{f,r}(\eta) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{B_t} f^*\eta \wedge \omega_0^{m-1},$$

où $B_t \subset \mathbb{C}^m$ est la boule de rayon t. On considère les courants positifs $\Phi_r \in A^{1,1}(X)'$ définis par

$$\Phi_r(\eta) := \frac{T_{f,r}(\eta)}{T_{f,r}(\omega)}.$$

Cela fournit une famille de courants positifs de masse bornée dont on peut extraire une sous-suite Φ_{r_n} convergeant vers $\Phi \in A^{1,1}(X)'$. De plus, il est possible de choisir $\{r_n\}$ telle que Φ soit fermé.

Remarque 3.1.1. *On remarque que l'on peut généraliser facilement la définition des courants précédents pour obtenir des courants de bidimension (k,k), $1 \leq k \leq m$. Cependant sans hypothèses sur f on perd la propriété de fermeture pour $k \neq 1$ (cf. [17] et [6]).*

Ainsi, on peut associer à f une classe de cohomologie $\Phi \in H^{n-1,n-1}(X,\mathbb{R})$. Il est alors possible de traduire la théorie de Nevanlinna en une théorie de l'intersection. Ainsi le Premier Théorème Fondamental de cette théorie donne

Lemme 3.1.2 ([21])**.** *Soit $Z \subset X$ une hypersurface algébrique. Si $f(\mathbb{C}^m) \not\subset Z$ alors $[\Phi].[Z] \geq 0$.*

3.2 Inégalités tautologiques

Soit $X_1 := G(m, TX)$ le fibré Grassmannien, $\pi : X_1 \to X$ la projection naturelle, S_1 le fibré tautologique sur X_1 et $L := \bigwedge^m S_1$.

Pour $f : \mathbb{C}^m \to X$ une application holomorphe de rang maximal, on a alors un relèvement $f_1 : \mathbb{C}^m \to X_1$ défini par $f_1 = (f, [\frac{\partial f}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial f}{\partial t_m}])$. On dispose alors du courant Φ_1 associé à f_1. Il est alors possible de montrer "l'inégalité tautologique suivante"

Théorème 3.2.1 ([21]).

$$[\Phi_1].L \geq 0.$$

Ce résultat peut sétendre au contexte logarithmique où l'on considère une paire (X, D) d'une variété projective X avec un diviseur à croisements normaux D.

Remarque 3.2.2. *Ces résultats peuvent être vus comme une généralisation des Seconds Théorèmes Fondamentaux de Griffiths-King [24].*

3.3 Applications holomorphes et feuilletages

3.3.1 Le cas lisse

Un feuilletage lisse de dimension p est donné par un sous-fibré intégrable $\mathcal{F} \subset T_X$ de rang p. Alors on a la suite exacte

$$0 \to \mathcal{F} \to T_X \to N_{\mathcal{F}} \to 0,$$

où $N_{\mathcal{F}}$ est le fibré normal du feuilletage. $K_{\mathcal{F}} := \det(\mathcal{F}^*)$ est le fibré canonique du feuilletage. On a l'isomorphisme $K_X = K_{\mathcal{F}} \otimes \det(N_{\mathcal{F}}^*)$.

Nous considérons des applications holomorphes $f : \mathbb{C}^p \to X$ de rang générique maximal tangentes au feuilletage $\mathcal{F}$.

On obtient alors le résultat suivant

Théorème 3.3.1 ([21]). *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage lisse de dimension p sur une variété projective X lisse de type général $p \leq \dim X = n$. Alors il n'existe pas d'application holomorphe $f : \mathbb{C}^p \to X$ tangente à $\mathcal{F}$ et Zariski-dense.*

Démonstration. On suppose qu'il existe une telle application f. Le feuilletage $\mathcal{F}$ définit une section $F \subset X_1 := \mathbb{P}(\bigwedge^p T_X)$ au-dessus de X et le fibré tautologique vérifie $L|_F = \pi^* K_{\mathcal{F}}^{-1}$. D'après le théorème 3.2.1 on a

$$0 \leq [\Phi_1].L = [\Phi].K_{\mathcal{F}}^{-1} = [\Phi].K_X^{-1} - [\Phi].\det(N_{\mathcal{F}}).$$

La deuxième égalité est justifiée par le fait que le fibré normal $N_{\mathcal{F}}|_{\mathcal{F}}$ est plat le long du feuilletage. Comme le fibré canonique K_X est gros, on obtient en utilisant le lemme 3.1.2

$$[\Phi].K_X^{-1} - [\Phi].\det(N_{\mathcal{F}}) = -[\Phi].K_X < 0,$$

ce qui fournit une contradiction. □

3.3.2 Le cas singulier

En général, les feuilletages avec lesquels on travaille n'ont aucune raison d'être lisses. Aussi, il est important de généraliser les résultats précédents aux feuilletages singuliers. Nous considérons un feuilletage holomorphe singulier $\mathcal{F}$ de codimension 1 sur une variété projective lisse X de dimension n. Il est donné localement par une forme différentielle ω telle que

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(z) dz_i$$

est une $1-$ forme intégrable, i.e. $\omega \wedge d\omega = 0$, et les coefficients a_i n'ont pas de facteur commun. Le *lieu singulier* $Sing\mathcal{F}$ est donné localement par les zéros communs des coefficients a_i.

Le feuilletage est défini par une collection de 1-formes $\omega_j \in \Omega^1_X(U_j)$ telles que $\omega_i = f_{ij}\omega_j$ sur $U_i \cap U_j$, $f_{ij} \in \mathcal{O}^*_X(U_i \cap U_j)$.

Comme dans le cas lisse, on dispose de deux fibrés en droites naturels associés à $\mathcal{F}$, le fibré normal $N_{\mathcal{F}}$ et le fibré canonique $K_{\mathcal{F}}$ du feuilletage $\mathcal{F}$. $N_{\mathcal{F}}$ est défini par le cocycle $\{f_{ij}\}$ et $K_{\mathcal{F}} = K_X \otimes N_{\mathcal{F}}$.

Dans le cas des surfaces, on dispose du théorème de résolution des singularités de Seidenberg [47] qui permet de se ramener à des singularités réduites. Plus généralement, on peut espérer se ramener par des théorèmes de résolution à des *singularités canoniques* définies par McQuillan [32] par analogie avec les singularités du programme du modèle minimal de la géométrie algébrique.

Définition 3.3.2. *Soit $(X, \mathcal{F})$ une paire composée d'une variété projective X et d'un feuilletage $\mathcal{F}$. Soit $p : (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}}) \to (X, \mathcal{F})$ un morphisme birationnel. Alors on peut écrire*

$$K_{\tilde{\mathcal{F}}} = p^* K_{\mathcal{F}} + \sum a(E, X, \mathcal{F})E,$$

$a(E, X, \mathcal{F})$ est indépendant du morphisme p et ne dépend que de la valuation discrète associée à E. On l'appelle discrépance de $(X, \mathcal{F})$ en E.

On définit

$$\begin{aligned} discrep(X,\mathcal{F}) = \inf\{a(E,X,\mathcal{F}); E \textit{ correspond à une valuation discrète} \\ \textit{telle que } Centre_X(E) \neq \emptyset \textit{ et } codim(Centre_X(E)) \geq 2\}. \end{aligned}$$

Les singularités de $(X,\mathcal{F})$ *sont dites canoniques si* $discrep(X,\mathcal{F}) \geq 0$.

Remarque 3.3.3. *Il convient de noter que pour l'instant on dispose de peu de théorèmes de résolutions des singularités pour les feuilletages : pour les feuilletages de codimension* 1 *sur les variétés de dimension* 3 *par [10] et récemment pour les feuilletages en courbes sur les variétés de dimension* 3 *[33].*

Dans un premier temps, on considère un feuilletage holomorphe singulier $\mathcal{F}$ de codimension 1 à singularités logarithmiques i.e. on peut écrire la forme ω en coordonnées locales

$$\omega = \left(\prod_{i=1}^{r} z_i\right) \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{dz_i}{z_i}.$$

En particulier les seules hypersurfaces intégrales sont les composantes de $z_1 \dots z_r = 0$. On peut supposer, quitte à faire des éclatements que les singularités sont adaptées à un diviseur à croisements normaux E (cf. [10]). Cela signifie que l'on a un diviseur à croisements normaux E tel que tout $P \in Sing\mathcal{F}$ appartient à au moins $r-1$ composantes irréductibles de E.

Alors on considère $X_1 := \mathbb{P}(\bigwedge^{m} T_X(-\log(E)))$ avec la projection naturelle $\pi : X_1 \to X$. Une application des méthodes précédentes au contexte logarithmique fournit alors sous les hypothéses précédentes

Théorème 3.3.4 ([21])**.**

$$[\Phi].K_{\mathcal{F}}^{-1} \geq 0.$$

Ceci fournit le résultat suivant

Théorème 3.3.5 ([21])**.** *Soit* $\mathcal{F}$ *un feuilletage holomorphe de codimension* 1 *sur une variété projective* X *de dimension* n. *Supposons que les singularités de* $\mathcal{F}$ *soient de de type logarithmique. Considérons une application holomorphe* $f : \mathbb{C}^{n-1} \to X$ *de rang générique maximal tangente à* $\mathcal{F}$. *Si le fibré canonique* $K_{\mathcal{F}}$ *est gros, alors* f *n'est pas Zariski-dense.*

On obtient alors comme première application

Corollaire 3.3.6 ([21])**.** *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe de codimension* 1 *sur $\mathbb{P}^n$ de degré $d \geq n$, à singularités logarithmiques et $f : \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{P}^n$ une application holomorphe tangente à $\mathcal{F}$, de rang générique maximal. Alors f n'est pas Zariski-dense.*

Comme deuxième application, on obtient pour les feuilletages à singularités canoniques pour lesquelles on dispose d'un "théorème de Frobenius"

Théorème 3.3.7 ([21])**.** *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe de codimension* 1 *sur X variété de type général,* $\dim X = n$*. On suppose que $\mathcal{F}$ a au plus des singularités canoniques et que localement $\mathcal{F}$ a une intégrale première holomorphe. Alors toute application holomorphe $f : \mathbb{C}^{n-1} \to X$ tangente à $\mathcal{F}$, de rang générique maximal, n'est pas Zariski-dense.*

En particulier, par le théorème de Malgrange [29], on obtient

Corollaire 3.3.8 ([21])**.** *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe de codimension* 1 *sur X variété de type général,* $\dim X = n$*. On suppose que $\mathcal{F}$ a au plus des singularités canoniques et que codim$(Sing\mathcal{F}) \geq 3$. Alors toute application holomorphe $f : \mathbb{C}^{n-1} \to X$ tangente à $\mathcal{F}$, de rang générique maximal, n'est pas Zariski-dense.*

Ces premiers résultats ouvrent plusieurs perspectives aussi bien du point de vue de la géométrie hyperbolique complexe que de la théorie des feuilletages.

Problème 3.3.9. *Enlever l'hypothèse d'existence des intégrales premières holomorphes dans le théorème précédent. Le théorème de résolution de Cano [10] impliquera alors la non-existence d'application holomorphe Zariski dense, tangente à un feuilletage, de $\mathbb{C}^2$ dans une variété de type général de dimension* 3.

Bibliographie

[1] F.A. Bogomolov, *Families of curves on a surface of general type*, Soviet. Math. Dokl. 18 (1977), 1294–1297.

[2] F. Bogomolov, B. De Oliveira, *Hyperbolicity of nodal hypersurfaces*, J. Reine Angew. Math. **596** (2006), 89–101.

[3] F.A. Bogomolov, Y. Tschinkel, *Special elliptic fibrations*, in Proc. Fano Conf., Torino (2003), ed. A. Conte, arxiv : math.AG/0303044.

[4] R. Bott, *Homogeneous vector bundles*, Ann. of Math. **66**, 1957, 203–248.

[5] R. Brody, *Compact manifolds in hyperbolicity*, Trans. Amer. Math. Soc. **235** (1978), 213–219.

[6] D. Burns, N. Sibony, *Limit currents and value distribution of holomorphic maps*, prépublication 2010, arXiv :1005.4330.

[7] F. Campana, *Orbifolds, special varieties and classification theory*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 54 (2004), no. 3, 499–630.

[8] F. Campana, M. Paun, *Variétés faiblement spéciales à courbes entières dégénérees*, Compos. Math. **143** (2007), no. 1, 95–111.

[9] F. Campana, J. Winkelmann, *A Brody theorem for orbifolds*, Manuscripta Math. 128 (2009), no. 2, 195–212.

[10] F. Cano, *Reduction of the singularities of codimension one singular foliations in dimension three*, Ann. of Math. (2) 160 (2004), no. 3, 907–1011.

[11] J. A. Carlson, M. Green, *A Picard theorem for holomorphic curves in the plane*, Duke Math. J. **43** (1976), no. 1, 1–9.

[12] X. Chen, *On Algebraic Hyperbolicity of Log Varieties*, Commun. Contemp. Math. **6** (2004), no. 4, 513–559.

[13] H. Clemens, *Curves on generic hypersurface*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **19** 1986, 629–636.

[14] J.-P. Demailly, *Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials*, Proc. Sympos. Pure Math., vol.62, Amer. Math.Soc., Providence, RI, 1997, 285–360.

[15] J.-P. Demailly, *L^2 vanishing theorems for positive line bundles and adjunction theory*, Transcendental methods in algebraic geometry (Cetraro 1994), Lect. Notes in Math, vol 1464, Springer, Berlin, 1996, 1–97.

[16] J.-P. Demailly, J. El Goul, *Hyperbolicity of generic surfaces of high degree in projective 3-space*, Amer. J. Math. **122** (2000), 515–546.

[17] H. De Thelin, *Ahlfors' currents in higher dimension*, à paraître aux Ann. Fac. Sci. Toulouse.

[18] S. Diverio, *Existence of global invariant jet differentials on projective hypersurfaces of high degree*, Math. Ann., 344 (2009), no. 2, 293–315.

[19] S. Diverio, J. Merker, E. Rousseau, *Effective algebraic degeneracy*, Invent. Math. 180 (2010), no. 1, 161–223.

[20] S. Diverio, S. Trapani, *A remark on the codimension of the Green-Griffiths locus of generic projective hypersurfaces of high degree*, prépublication 2009, arXiv :0902.3741v2.

[21] C. Gasbarri, G.Pacienza, E. Rousseau : *Higher dimensional tautological inequalities and applications*, prépublication arXiv :1006.5138, 2010.

[22] H. Grauert, U. Peternell *Hyperbolicity of the complement of plane curves*, Manuscripta Math. **50** (1985), 429–441.

[23] M. Green, P. Griffiths, *Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings*, The Chern Symposium 1979, Proc. Inter. Sympos. Berkeley, CA, 1979, Springer-Verlag, New-York (1980), 41–74.

[24] P. Griffiths, J. King, *Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties*, Acta Math. 130 (1973), 145–220.

[25] T. Kawasaki, *The Riemann-Roch theorem for complex V-manifolds*, Osaka J. Math. **16** (1979), no. 1, 151–159.

[26] S. Kobayashi, *Hyperbolic complex spaces*, Springer, 1998.

[27] S. Lang, *Introduction to complex hyperbolic spaces*, Springer, 1987.

[28] S. S.-Y. Lu, Y. Miyaoka, *Bounding codimension-one subvarieties and a general inequality between Chern numbers*, Amer. J. Math. 119 (1997), no. 3, 487–502.

[29] B. Malgrange *Frobenius avec singularités. I. Codimension un*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 46 (1976), 163–173.

[30] M. McQuillan, *Diophantine approximations and foliations*, Publ. IHES **87** (1998), 121–174.

[31] M. McQuillan, *Holomorphic curves on hyperplane sections of* 3*-folds*, Geom. Funct. Anal. **9** (1999), 370–392.

[32] M. McQuillan, *Canonical models of foliations*, Pure Appl. Math. Q. 4 (2008), no. 3, part 2, 877–1012.

[33] M. McQuillan ; D. Panazzolo, *Almost etale resolution of foliations*, prépublication IHES, 2009.

[34] J. Merker, *Low pole order frames on vertical jets of the universal hypersurface*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 59 (2009), no. 3, 1077–1104.

[35] G. Pacienza, *Subvarieties of general type on a general projective hypersurface*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), no. 7, 2649–2661.

[36] G. Pacienza, E. Rousseau, *On the logarithmic Kobayashi conjecture*, J. Reine Angew. Math. 611 (2007), 221–235.

[37] G. Pacienza, E. Rousseau, *Generalized Demailly-Semple jet bundles and holomorphic mappings into complex manifolds*, à paraître au J. Math. Pures Appl.

[38] M. Păun, *Vector fields on the total space of hypersurfaces in the projective space and hyperbolicity*, Math. Ann. 340 (2008), no. 4, 875–892.

[39] E. Rousseau, *Etude des jets de Demailly-Semple en dimension 3*, Ann. Inst. Fourier **56** (2006), 397–421.

[40] E. Rousseau, *Equations différentielles sur les hypersurfaces de l'espace projectif de dimension 4*, J. Math. Pures Appl. **86** (2006), 322–341.

[41] E. Rousseau, *Weak analytic hyperbolicity of generic hypersurfaces of high degree in* $\mathbb{P}^4$, Annales Fac. Sci. Toulouse **16** (2007), no.2, 369–383.

[42] E. Rousseau, *Weak analytic hyperbolicity of complements of generic surfaces of high degree in projective 3-space*, Osaka J. Math. 44 (2007), no. 4, 955–971.

[43] E. Rousseau, *Logarithmic vector fields and hyperbolicity*, Nagoya Math. J. 195 (2009), 21–40.

[44] E. Rousseau, *Hyperbolicity of geometric orbifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), no. 7, 3799–3826.

[45] E. Rousseau, *Degeneracy of holomorphic maps via orbifolds*, à paraître au Bull. Soc. Math. France.

[46] H. Royden, *Remarks on the Kobayashi metric*, Proc. Maryland Conference on several complex variables, Springer Lecture Notes, Vol. 185, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[47] A., Seidenberg, *Reduction of singularities of the differential equation* $A\,dy = B\,dx$, Amer. J. Math. 90 1968 248–269.

[48] Y.-T. Siu, *Hyperbolicity in complex geometry*, The legacy of Niels Henrik Abel, Springer, Berlin, 2004, 543–566.

[49] B. Toën, *Théorèmes de Riemann-Roch pour les champs de Deligne-Mumford*, K-Theory **18** (1999), no. 1, 33–76.

[50] C. Voisin, *On a conjecture of Clemens on rational curves on hypersurfaces*, J. Diff. Geom. **44** (1996), no. 1, 200–213.

[51] C. Voisin, *A correction : "On a conjecture of Clemens on rational curves on hypersurfaces"*, J. Diff. Geom. **49** (1998), no. 3, 601–611.

[52] C. Voisin, *On some problems of Kobayashi and Lang ; algebraic approaches*, Current developments in mathematics, 2003, 53–125, Int. Press, Somerville, MA, 2003.